This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

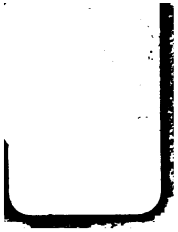
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



OKG

Geometry 1839
(I.C)

Populäre

Geometrie,

als

Hülfsbuch

für

Leser gemeinfaßlicher Darstellungen aus dem Gebiete der Astronomie und Physik, und als Einleitung in das Studium der Geometrie überhaupt abgefaßt

von

K. L. Edlem von Littrow,

Adjuncten an der k. k. Sternwarte zu Wien, Doct. d. Phil., correspond. oder Ehren-Mitgliede der gelehrten Gesellschaften zu Sächs. Altenburg, Erfurt, Frankfurt a. M., Jassy, Mainz, Padua u. s. w.

Stuttgart.
Hoffmann'sche Verlags-Buchhandlung.

1839.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R L

Vorwort.

Phyſikaliſche und aſtronomiſche Kenntniſſe finden in unſerer Zeit immer ſteigenderes Intereſſe, und die Schriften, welche gemeinfaßliche Darſtellungen derſelben enthalten, erfreuen ſich von Tag zu Tag eines größeren Publikums. Um ſo allgemeiner muß ſich denn auch das Bedürfniß herausſtellen, wenigſtens mit den erſten Anfangsgründen der Geometrie bekannt zu ſeyn, ohne die ſich in jenen Wiſſenſchaften ſelbſt bei der populärſten Behandlung wenig leiſten läßt. Die Vorleſungen über populäre Aſtronomie, welche ich an der

hieſigen Hochſchule zu geben habe, leiteten mich, da ich bei mehreren Zuhörern auf jenes Hinderniß des Verſtändniſſes meines Vortrages gekommen war, auf den Gedanken, eine Schrift abzufaſſen, in welcher der Leſer mit den wichtigſten Lehren der Geometrie bekannt gemacht würde, ohne das Gerüſte algebraiſcher Kunſtgriffe und die eigenthümliche mathematiſche Sprache einzuführen, welche oft bloß durch ihre ungewöhnliche Form dem Inhalte nach ſehr einfache Sätze dem Laien unzugänglich machen.

Ich übergebe nun in der vorliegenden Schrift einen Verſuch dieſer Art der Oeffentlichkeit. Unter den wenigen Vorgängern, die ich in dieſem Fache hatte, iſt wohl bei weitem das gediegenſte: **D. Lardner's First principles of Arithmetic and Geometry. London 1835,** deſſen zweite Abtheilung ich denn auch meiner gegenwärtigen Schrift zum Grunde legte. Umfang und Ordnung des Stoffes ſchienen mir

keiner Verbeſſerung zu bedürfen, daher ich ſie auch im Allgemeinen beibehielt, und nur durch gewiſſe Auslaſſungen und Zuſätze meinem hier verfolgten Zwecke näher zu kommen ſuchte. Was hingegen die Art des Vortrages betrifft, ſo glaubte ich z. B. die dialogiſche Form, welche Lardner gewählt, als im Populariſiren des Gegenſtandes doch wohl zu weit gehend, völlig verlaſſen, und inſofern das Ganze umſchmelzen zu müſſen.

Die hier gewählte, ſo viel mir bekannt, wenigſtens auf deutſchem Boden neue Behandlungsart des an ſich allbekannten, der Hauptſache nach ſchon von Vater Euclid unverbeſſerlich bearbeiteten Stoffes macht vielleicht gegenwärtige Schrift auch zum Vorbereitungsbuche bei den geometriſchen Studien der Jugend geeignet, und ich hatte, da ſich beide Zwecke ſo gut vereinen ließen, auch dieſen bei der Abfaſſung derſelben im Auge.

Inwiefern ich die Aufgabe, die ich mir hier ſtellte, gelöſet, mag nun das Publikum entſcheiden. Jedenfalls glaube ich bei einer Sache, in der es, ein ſeltener Fall der heutigen Literatur, ſo ſehr an Vorgängern fehlte, Nachſicht anſprechen zu dürfen, und ſehe deßhalb mit Vertrauen der Aufnahme dieſer Blätter entgegen.

Wien, den 11. November 1838.

K. L. von Littrow.

Einleitung.

Das Wort Geometrie kommt vom griechiſchen γη (die Erde) und μετρον (das Maaß), heißt alſo ſeiner Etymologie nach ſo viel als Erdmeßkunſt, und ſollte mit dem, was man gewöhnlich Feldmeßkunſt zu nennen pflegt, identiſch ſeyn. Doch iſt dem nicht ganz ſo; obſchon der Feldmeſſer Geometrie verſtehen muß, ſo iſt doch ſein Geſchäft weſentlich von dem verſchieden, was man heut zu Tage unter Geometrie begreift. Wahrſcheinlich kamen die Menſchen auf die erſten geometriſchen Sätze durch die Nothwendigkeit, Land unter ſich zu vertheilen. In der That ſoll die Geometrie eine Erfindung der Aegypter ſeyn. Der mächtige Nil, der bekanntlich ihr Land von einem Ende zum andern durchfließt, überſchreitet zu gewiſſen Jahreszeiten ſeine Ufer, und ſchwemmt dann alle Grenzmarken und Einfriedungen, durch welche das Eigenthum verſchiedener

Beſitzer getrennt war, ſpurlos weg. Nach erfolgtem Zurücktreten der Gewäſſer unterliegt es daher großen Schwierigkeiten, die Grenzen und die Ausdehnung des Beſitzthums eines Jeden zu finden, und hier iſt dann die Meßkunſt wohl am Platze, und wird durch häufigen Gebrauch bald zu hoher Vollkommenheit gedeihen. Wenn gleich ſo in Aegypten mehr Veranlaſſung zur Ausbildung dieſer Wiſſenſchaft vorhanden war, ſo fehlte es daran ganz und gar wohl nirgends, und die Geometrie mag daher in ihrem erſten Entſtehen eben ſo alt, als weit verbreitet ſeyn.

Unter Geometrie im Allgemeinen aber verſteht man die Kunſt, Größen jeder Art zu meſſen, ihre Geſtalten auszudrücken und zu vergleichen. Der Architect, wenn er über die Größe und die Verhältniſſe eines Gebäudes urtheilt, der Zimmermann, der ein Gebälke mißt und geſtaltet, der Seemann, wenn er den Lauf und die Richtung ſeines Schiffes beſtimmt, der Aſtronom, der die Entfernungen der Geſtirne zu finden ſucht — alle geben ſich mit Raum-Meſſungen ab, d. h. wenden Geometrie an. Die Feldmeßkunſt iſt alſo nur eine einzelne dieſer vielen Anwendungen, und die Geometrie lehrt uns die allgemeinen Regeln kennen, die für alle dieſe verſchiedenen Zwecke gleich nothwendig und gültig ſind.

Viele dieſer Regeln mögen ſchon früh gefunden und benützt worden ſeyn, und gewiß ſind ſie nicht alle, wie überhaupt keine Wiſſenſchaft, die Entdeckung eines einzigen Menſchen oder auch nur

eines einzigen Zeitalters, ſondern wurden nach und nach von Verſchiedenen gefunden, je nachdem Erfahrung ſie kund und Veranlaſſung dazu gab.

Der erſte jedoch, der alle die einzelnen Sätze ſammelte, und dabei wahrſcheinlich, vorzüglich um den Zuſammenhang derſelben vollkommen herzuſtellen, viele neue erfand, war Euclid, ein wahrhaft großer Gelehrter, der, aus Alexandrien in Aegypten gebürtig, um das Jahr 300 vor Chriſto lebte, und in vielen Zweigen des menſchlichen Wiſſens arbeitete und ſchrieb. Sein vorzüglichſtes Werk, das den eigentlichen Grund zu ſeiner Unſterblichkeit legte, ſind die „Elemente der Geometrie“, ein Buch, das, obſchon vor mehr als zweitauſend Jahren abgefaßt, ſeine Aufgabe ſo vollkommen löst, daß ſeitdem über denſelben Gegenſtand keines geſchrieben wurde, welches man jenem allgemein vorgezogen hätte.

Obſchon nun die Geometrie in viele Geſchäfte unmittelbar eingreift, ſo liegt doch der Grund davon, daß man ſo allgemein ſie in den Schulen lehrt, vorzüglich in dem Nutzen der Verſtandesſchärfung, den ſie mehr, als irgend eine Wiſſenſchaft gewährt. Dem Mathematiker gibt ſeine Wiſſenſchaft eine Stärke der Denkkraft, eine Conſequenz der Schlußfolge, und eine Bündigkeit im Ausdruck, die ihn vor allen auszeichnet, denen gleiche Uebung fehlte. Aſtronomiſche und phyſikaliſche Lehren aber kann man ohne geometriſche Vorkenntniſſe durchaus nicht

verſtehen. Als Vorbereitung nun ſowohl zum Studium der Elemente Euclids, als auch für Jene, die populäre Schriften über die eben genannten Naturwiſſenſchaften leſen wollen, mag die folgende, von der Euclideiſchen abweichende Darſtellungsweiſe verſucht werden.

Erſter Abſchnitt.

Natur der geraden Linie. — Unterſchied zwiſchen geraden und krummen Linien. — Geometriſche Figuren. — Winkel. — Spitzer und ſtumpfer Winkel. — Rechter Winkel.

1.

Was man unter einer geraden Linie verſteht, weiß Jedermann; ein anſchauliches Bild davon iſt ein Draht, den man ſo ſtraff, als möglich, von einem Punkte zu einem anderen geſpannt hat.

2.

Zwiſchen zwei Punkten kann es nur eine gerade, hingegen unendlich viele krumme Linien geben; hier findet das gegenſeitige Verdrängen, wie bei der geraden Linie, keineswegs Statt. So kann ich zwiſchen den Punkten A und B (Fig. 1) eine Menge krummer Linien ziehen, die ſich nur in dieſen Punkten begegnen. Um unſer früheres Gleichniß fortzuſetzen, zwiſchen zwei Punkten kann man ſehr viele

ſchlaffe Drähte ziehen, hingegen nur einen völlig ſtraffen Draht. Wenn der Mond im erſten Viertel iſt, bilden ſeine Umriſſe zwei krumme zwiſchen denſelben Punkten, nämlich zwiſchen den Hörnerſpitzen des Mondes gezogene Linien, die ſich nur in dieſen Spitzen berühren.

3.

Eine gerade Linie iſt ferner die kürzeſte, welche man zwiſchen zwei Punkten ziehen kann; denn es wird deſto weniger Draht nöthig ſeyn, je ſtraffer man ihn ſpannt. Dieß iſt eine Eigenſchaft, welche die gerade Linie vor allen anderen Linien auszeichnet.

4.

Ein weiteres bemerkenswerthes Kennzeichen derſelben iſt, wie Euclid ſich ausdrückt, daß ſie nur zwiſchen ihren Endpunkten liegt, und weder nach oben, noch unten, noch nach ſonſt einer Seite hin ausgedehnt iſt. Dieſe Eigenſchaft ſpricht ſich z. B. aus, wenn man längs eines Lineals hinſieht, deſſen Schneide, wenn es vollkommen iſt, in einer gewiſſen Lage ganz in einen Punkt zu verſchwinden ſcheint.

5.

Unter geometriſcher Figur verſteht man einen von Linien eingeſchloſſenen Raum.

Von zwei geraden Linien kann daher keine Figur gebildet werden; denn, wenn man z. B. vom Punkte

A (Fig. 2) zwei gerade Linien AB und AC zieht, ſo können ſich nach dem obigen (2) dieſelben in keinem zweiten Punkte begegnen, der Raum ABC bleibt alſo immer auf der Seite von B und C offen, und die Linien AB und AC bilden nur einen Winkel BAC.

6.

Unter Winkel verſteht man alſo einen ſolchen von zwei Linien theilweiſe eingeſchloſſenen Raum; der Punkt A heißt ſein Scheitel, die Linien AB und AC aber ſeine Schenkel, und den Winkel bezeichnet man durch die drei Buchſtaben A, B und C, indem man denjenigen, der am Scheitel ſteht, in die Mitte ſetzt; ſo iſt z. B. hier BAC der eben betrachtete Winkel.

7.

Ein Winkel wird größer oder kleiner, d. h. wie die Kunſtausdrücke lauten, ſtumpfer oder ſpitzer ſeyn, je nachdem die ihn bildenden Schenkel mehr oder weniger geöffnet ſind. So iſt der Winkel BAC in Fig. 3 ſtumpfer, als der Winkel BAC in Fig. 2.

8.

Um zu erkennen, ob zwei Winkel gleich ſind, wird man den Scheitel des einen über den Scheitel des andern, und einen Schenkel des einen über einen Schenkel des anderen Winkels legen; fallen dann die beiden anderen Schenkel ebenfalls

genau über einander, ſo ſind die beiden Winkel gleich; im Gegentheile derjenige Winkel der größere, deſſen Schenkel über den des anderen Winkels hinaus liegt.

9.

Wenn zwei gerade Linien **BC** und **DE** ſich in einem Punkte **A** ſchneiden, ſo entſtehen um den Punkt **A** herum vier Winkel, von denen je zwei, nämlich die beiden ſtumpfen **DAC** und **BAE**, ſo wie die beiden ſpitzen **EAC** und **BAD** einander, wie man ſich nach (8) überzeugen kann, gleich ſind. Dieſe paarweiſe einander gleichen Winkel heißen *Scheitelwinkel*.

10.

Wenn man die gerade Linie **DE** um den Punkt **A** herum dreht, etwa wie man einen Theil einer Scheere bewegt, indem man dieſelbe bald öffnet, bald ſchließt, ſo wachſen offenbar die beiden ſpitzen Scheitelwinkel im ſelben Maaße, in welchem die ſtumpfen abnehmen, und umgekehrt, je nachdem man bei dieſer Drehung den Punkt **E** von dem Punkte **C** entfernt, oder ihn demſelben nähert. Da wird es nun offenbar eine Lage der Linie **DE** geben, in welcher die vier um **A** herum liegenden Winkel einander durchaus gleich ſind, wie dieß in Fig. 5 der Fall iſt. Dann aber ſagt man, daß die beiden Linien **BC** und **DE** auf einander *ſenkrecht* ſtehen, und die vier von ihnen gebildeten Winkel heißen *rechte* Winkel.

11.

Die Ausdrücke ſpitzer und ſtumpfer Winkel hat man nun genauer dahin zu verſtehen, daß man unter dem erſten Ausdrucke Winkel begreift, die kleiner, und unter dem letzten Winkel, die größer, als ein rechter ſind. Ein rechter Winkel ſelbſt aber iſt an ſich weder ſpitz, noch ſtumpf, ſondern hält zwiſchen beiden die Mitte.

12.

Die vier von zwei ſich ſchneidenden geraden Linien gebildeten Winkel (Fig. 4) ſind alſo zuſammen immer gleich vier Rechten; denn dieß iſt bewieſen für die Stellung der Linien in Fig. 5, allein, wie man nun auch DE um A herum drehen mag, ſo nimmt das eine Paar Winkel immer im ſelben Maaße zu, in welchem das andere Paar abnimmt, und die Summe aller vier Winkel muß dieſelbe, d. h. muß immer gleich vier Rechten bleiben.

13.

Da ferner zur Bildung der beiden rechten Winkel in Fig. 5, die ober der Linie BC liegen, immer nur entweder die zwei rechten Winkel in Fig. 5, oder der ſpitze Winkel EAC und der ſtumpfe EAB in Fig. 4 dienen, die beide auf einer Seite von BC liegen, ſo machen dieſe beiden Winkel zuſammen immer zwei Rechte, und heißen Nebenwinkel.

Sie entſtehen aber im Allgemeinen dadurch, daß eine Gerade BC von einer anderen Geraden AE getroffen wird.

Zweiter Abſchnitt.

Dreieck. — Seiten und Winkel deſſelben. — Gleichheit von Dreiecken. — Bedingungen dafür. — Unterſchied zwiſchen Dreiecken und anderen Figuren. — Gleichwinklige Dreiecke ſind ähnlich. — Gleichſeitige Dreiecke. — Gleiche Seiten bringen gleiche Winkel, ungleiche Seiten ungleiche Winkel mit ſich. — Ein Quadrat zu verzeichnen. — Gleichſeitiges Dreieck.

14.

Nach (5) kann man keinen Raum mit zwei geraden Linien einſchließen; wohl aber kann man dieß mit drei geraden Linien, und nennt die ſo entſtehende Figur ein Dreieck, da ſie immer drei Winkel enthält.

15.

Die geraden Linien, welche die Figur bilden, oder mit anderen Worten die Schenkel der in der Figur vorkommenden Winkel heißen die Seiten der Figur, alſo z. B. im Dreiecke abc ſind A, B, C die Seiten des Dreiecks.

Eine der Seiten eines Dreiecks wird zuweilen auch Baſis genannt; gewöhnlich iſt es die zu

unterſt liegende, obſchon eigentlich kein beſtimmter Unterſchied zwiſchen den Ausdrücken Baſis und Seite beſteht, und man jede Seite eines Dreieckes als Baſis deſſelben betrachten kann.

16.

Man ſchneide die beiden Winkel b und c Fig. 6 in Papier aus, womit man dann leicht Winkel, welche jenen gleich ſind, wird beſchreiben können, ziehe Fig. 7 eine Linie A', die gleich lang mit der Linie A in Fig. 6 iſt, und ziehe nun mit den aus Papier ausgeſchnittenen Winkeln an den Enden dieſer Linie zwei Winkel b' und c', die alſo den Winkeln b und c in Fig. 6 gleich ſeyn werden. Verlängert man die Schenkel dieſer Winkel b' und c', ſo entſteht ein Dreieck, deſſen eine Seite A', ſo wie die Winkel b' und c' der Seite A und den Winkeln b und c des Dreiecks Fig. 6 gleich ſind. Vergleicht man aber die Dreiecke näher, ſo findet man auch die übrigen Stücke des neuen Dreieckes den analogen des alten vollkommen gleich, nämlich die Seite B' gleich der Seite B, die Seite C' gleich der Seite C, den Winkel a' gleich dem Winkel a, und alſo überhaupt die beiden Dreiecke in jeder Rückſicht einander gleich, ſo daß ſie über einander gelegt ſich durchaus genau decken.

Zwei Dreiecke ſind alſo gleich, wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln des einen Dreieckes einer Seite mit den

zwei anliegenden Winkeln des anderen Dreieckes gleich ſind, und man braucht, um ſich von der völligen Gleichheit zweier Dreiecke zu überzeugen, nicht erſt alle Stücke deſſelben, ſondern nur eine Seite mit den anliegenden Winkeln zu betrachten.

Wenn man in das Blatt eines Buches ein ſogenanntes Ohr macht, ſo deckt das umgebogene Dreieck auf der Seite des Buches einen Raum, den jedermann für dieſem Dreiecke gleich halten wird; der Grund davon aber liegt in dem eben gegebenen geometriſchen Satze, denn die Linie des Buges iſt als Seite, ſo wie die anliegenden Winkel beiden Figuren, der deckenden und der gedeckten, gemeinſchaftlich.

So einfach iſt dieſer hochwichtige und an Anwendung überreiche Satz der Geometrie, und ſo ſehr liegen die Schwierigkeiten, welche Viele beim Verſtändniſſe ähnlicher Lehren finden, mehr in den ungewöhnlichen Kunſtausdrücken und der Sprache, die für wiſſenſchaftliche Zwecke nöthig ſind, als in der Sache ſelbſt.

Man begann hier übrigens mit Betrachtung der Dreiecke, weil, wie wir ſpäter ſehen werden, jede geometriſche von geraden Linien eingeſchloſſene Figur ſich in Dreiecke zerlegen läßt, und man für jede derſelben leicht die nöthigen Sätze findet, wenn man diejenigen kennt, welche für Dreiecke gelten. Es wird daher auch von Wichtigkeit ſeyn, alle die

verſchiedenen Fälle zu erforſchen, in welchen zwei Dreiecke einander gleich ſind.

17.

Man kann ſich aber auf dieſelbe Art überzeugen, daß zwei Dreiecke Fig. 8 und Fig. 9 einander vollkommen gleich ſind, wenn ein Winkel c mit den einſchließenden Seiten A und B des einen einem Winkel c' mit den einſchließenden Seiten A' und B' des anderen Dreieckes gleich ſind.

18.

Ziehen wir jetzt eine Linie A' Fig. 10 gleich der Linie A in Fig. 8, ſchneiden wir den Winkel b in Papier aus, und ziehen wir damit C', indem wir b' gleich b machen. Nehmen wir ebenſo ein Muſter vom Winkel a, ſetzen wir einen Schenkel deſſelben auf C', und bewegen wir daſſelbe längs der Linie C' ſo lange bis der andere Schenkel durch das obere Ende von A' geht. Zieht man dann B', ſo iſt auf dieſe Weiſe ein Dreieck Fig. 10 entſtanden, welches mit Fig. 8 die Seiten A und A', die Winkel b und b' und die Winkel a und a' gleich hat. Legt man aber dieſe beiden Dreiecke über einander, ſo decken ſie ſich vollkommen, ſind alſo einander gleich.

Es ſind daher zwei Dreiecke einander auch dann gleich, wenn zwei Winkel und eine einem dieſer Winkel gegenüber liegende Seite des einen Dreieckes zwei Winkeln und der

dem gleichen Winkel gegenüber liegenden Seite des anderen Dreieckes gleich ſind.

19.

Endlich ſind zwei Dreiecke einander auch gleich, wenn alle drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen gleich ſind, wovon man ſich leicht überzeugen kann, wenn man ein beliebiges Dreieck verzeichnet, und drei gerade Linien, ſtückweiſe den Seiten deſſelben gleich, z. B. aus Draht bildet. Setzt man dieſe Linien dann zu einem Dreiecke zuſammen, und bringt man dieſes über jenes verzeichnete Dreieck in der gehörigen Lage, ſo decken ſich dieſelben zum Beweiſe ihrer Gleichheit vollkommen.

20.

Man nennt die hier betrachtete Gleichheit von Figuren, eben dieſer Eigenſchaft des Deckens wegen, Congruenz, und die ſo gleichen Figuren congruente Figuren, von einem lateiniſchen Worte, welches „zuſammenfallen“ heißt.

21.

Der ſtrenge Beweis für dieſen Satz iſt einigen Schwierigkeiten unterworfen. Wir begnügen uns hier mit dieſer Darſtellung deſſelben, und bemerken nur noch, daß jene Eigenſchaft bei gleichen Seiten congruent zu ſeyn, nur dem Dreiecke zukommt,

und keinesweges von anderen geometriſchen Figuren gilt, wie denn z. B. bei einer vierſeitigen Figur Fig. 11 und Fig. 12 die Seiten A, B, C, D ſtückweiſe den Seiten A', B', C', D' gleich, und doch die Figuren ſelbſt in Geſtalt und Größe völlig von einander verſchieden ſeyn können.

22.

Wenn man von der Vergleichung von Dreiecken in Bezug auf ihre Gleichheit ſpricht, liegt der Fall, wo zwei Dreiecke gleiche Winkel haben, ſehr nahe, und wird gewiß Jedermann ſchnell in den Sinn kommen; demungeachtet findet in dieſem Falle nicht nothwendig Congruenz ſtatt, wie wir ſchon aus den drei Fig. 13, 14 und 15 verzeichneten Dreiecken ſehen, die alle gleiche Winkel haben, und doch zwar in der Geſtalt ähnlich, aber in der Größe durchaus verſchieden ſind. Wir werden von dieſem und verwandten Fällen weiter unten handeln, und wollen uns gegenwärtig auf dieſe kurze Erwähnung beſchränken.

23.

Es ſtelle Fig. 16 ein Dreieck vor, deſſen Seiten A und B einander gleich ſind, und man führe von c nach der Mitte der Seite C eine gerade Linie cC, welche alſo das urſprüngliche Dreieck in zwei Dreiecke zerfällt, die gleiche Seiten haben, da A gleich B, Cc beiden Dreiecken gemeinſchaftlich und, weil C in der Mitte zwiſchen a und b liegt,

bC gleich Ca iſt. Dieſe beiden Dreiecke ſind alſo nach 19. congruent, folglich auch die Winkel bei C, die bei c, und die Winkel a und b einander gleich. Wenn aber die Winkel bei C einander gleich ſind, ſo iſt nach (10) jeder derſelben ein Rechter, und die Linie cC ſenkrecht auf der Seite C.

Man nennt ein ſolches Dreieck mit zwei einander gleichen Seiten ein gleichſchenkliges, c den Scheitel, und die Seite C die Baſis.

In einem gleichſchenkligen Dreiecke alſo ſind die Winkel an der Baſis gleich; eine vom Scheitel zum Mittel- oder Halbirungspunkte der Baſis gezogene Linie ſteht ſenkrecht auf der Baſis und theilt den Winkel am Scheitel in zwei gleiche Theile oder halbirt ihn.

24.

Ziehen wir jetzt Fig. 17 eine Linie C, und mit einem in Papier ausgeſchnittenen Winkel an den Enden dieſer Linie C zwei gleiche Winkel a und b. Verlängert man die Schenkel derſelben, ſo entſteht ein Dreieck, deſſen Seiten A und B gleich ſind, wie ſchon durch unmittelbare Meſſung mit dem Zirkel erſichtlich wird. Fällt man aber überdieß aus c eine Senkrechte cC auf C, ſo folgt jene Gleichheit von A und B auch aus der Betrachtung der ſo entſtandenen Dreiecke acC und bcC, die nach 18. congruent ſind, weil ſie die Seite cC gemeinſchaftlich,

und die Winkel bei C als rechte, ſo wie die Winkel b und c vermöge der Annahme gleich haben. Es folgt aber ferner aus der Congruenz dieſer Dreiecke auch, daß die Seite C und der Winkel c durch die Senkrechte cC in zwei gleiche Theile getheilt oder halbirt worden ſind.

Wenn alſo ein Dreieck zwei gleiche Winkel hat, ſo ſind die gegenüber liegenden Seiten ebenfalls gleich, und es iſt daher ein gleichſchenkligtes Dreieck. Eine Senkrechte vom Scheitel auf die Baſis aber halbirt dann dieſe ſo wie den Winkel am Scheitel.

25.

So wie nun dieſe Gleichheit der Seiten eine Gleichheit der Winkel herbeiführt, ſo wird auch eine Ungleichheit der Seiten eine entſprechende Ungleichheit der Winkel erzeugen, und z. B. dem größeren Winkel ſtets die größere Seite gegenüber liegen, wie dieß ſchon der Augenſchein lehrt, wenn man ſich mehrere Dreiecke mit ungleichen Seiten verzeichnet.

26.

Um aber einen rechten Winkel verzeichnen, oder was daſſelbe, eine Gerade auf die andere ſenkrecht ziehen zu können, wird man ein Stück Papier auf einer Seite genau in gerader Linie beſchneiden, und dann ſo zuſammenbiegen, daß ein Theil dieſer geraden Linie genau

über den andern fällt; eine gerade Linie im Buche des Papiers gezogen, ſteht ſenkrecht auf der beſchnittenen Seite deſſelben, denn die beiden von dieſer geraden Linie auf der beſchnittenen Seite gebildeten Winkel ſind Nebenwinkel und gleich, da ſie ſich aber deckten, alſo rechte Winkel. So erhält man leicht ein Muſter für rechte Winkel und zur Fällung von Senkrechten, wenn man dieſen ſo eben erhaltenen rechten Winkel ausſchneidet.

27.

Wenn die drei Seiten eines und deſſelben Dreieckes einander gleich ſind, ſo ſind auch die Winkel deſſelben einander gleich, denn nach (23) ſind dann immer je zwei Winkel gleich, mithin alle drei unter einander; und umgekehrt: wenn die Winkel eines und deſſelben Dreieckes unter einander gleich ſind, ſo ſind auch die Seiten einander gleich. Hiervon kann man ſich leicht überzeugen, wenn man ein ſolches ſogenanntes gleichſeitiges Dreieck Fig. 18 verzeichnet, und Winkel mit Winkel vergleicht, oder umgekehrt, eine ſolche Figur mit gleichen Winkeln conſtruirt, und die Seiten vergleicht.

Dritter Abſchnitt.

Parallele Linien. — Sie ſchneiden ſich nie. — Stehen überall gleichweit von einander ab. — Sind gleich geneigt gegen Linien, die ſich ſchneiden. — Stehen ſenkrecht auf dieſelbe Linie. — Eine Parallele zu ziehen.

28.

Legen wir einen in Papier ausgeſchnittenen Winkel auf die Linie AB Fig. 19 und beſchreiben wir damit im Punkte P einen Winkel a. Bringen wir dann unſeren Winkel von Papier auf den Endpunkt Q des eben gezogenen Schenkels vom Winkel a und legen wir ihn hier in einer mit der früheren entgegengeſetzten Richtung an, um ſo damit den Winkel b, der alſo dem Winkel a gleich ſeyn wird, zu beſchreiben. Verlängert man nun den eben gezogenen Schenkel CQ dieſes Winkels etwa nach D, ſo fällt bei den ſo entſtandenen geraden Linien AB und CD ſogleich auf, daß dieſelben ſich auf keiner Seite einander zu nähern, oder von einander zu entfernen ſcheinen, ſo daß man dieſelben beliebig verlängern könnte, ohne daß ſie irgendwo ſich ſchnitten. In der That findet man, wenn man von verſchiedenen Punkten der Linie CD Senkrechte auf AB fällt, dieſelben alle genau von gleicher Länge, zum Beweiſe, daß dieſe beiden Linien durchaus gleichweit von einander entfernt ſind.

29.

Solche Linien nun, die durchaus gleichweit von einander abſtehen, und ſich alſo nicht ſchneiden, man mag ſie verlängern, ſo weit man will, heißen parallele Linien.

30.

Aus der Art, wie wir Fig. 19 conſtruirten, geht hervor, daß wenn zwei ſolche Parallele AB und CD von einer dritten Geraden PQ geſchnitten werden, die auf entgegengeſetzten dieſer Geraden gebildeten Winkel a und b, welche man Wechſelwinkel nennt, einander gleich ſind. Dieß findet offenbar bei jedweder Anordnung der drei Linien Statt, wie ſchon aus der völlig anders geſtellten Fig. 20 erhellt.

31.

Daraus folgt unmittelbar, daß, wenn eine Gerade zwei Parallele ſchneidet, und mit einer derſelben rechte Winkel bildet, ſie auch mit der anderen rechte Winkel bilden müſſe.

32.

Eine gerade Linie alſo, die auf einer der Parallelen ſenkrecht ſteht, ſteht auch auf der anderen, und überhaupt auf allen mit jenen erſten parallel gezogenen Linien ſenkrecht (Fig. 21).

33.

Ziehen wir wieder parallele Linien und eine Gerade, die ſie ſchneidet, Fig. 22, ſo entſtehen hier offenbar im Ganzen acht Winkel, von denen je vier, theils als Wechſelwinkel (30), theils als Scheitelwinkel (9) einander gleich, und hier deßhalb auch mit denſelben Buchſtaben bezeichnet ſind. Man nennt aber die auf einer Seite der ſchneidenden Linie liegenden Winkel Gegenwinkel, und zwar a und b, ſo wie a′ und b′ innere, a″ und b″, ſo wie a‴ und b‴ äußere Gegenwinkel.

Es iſt alſo ein innerer ſtets ſeinem äußeren Gegenwinkel gleich, und umgekehrt.

34.

Die Winkel a, a′ . . . ſind durchaus ſpitz, die Winkel b, b′, . . . durchaus ſtumpf, und als Nebenwinkel (13) machen immer einer der Winkel a, a′, . . . und einer der Winkel b, b′ . . . zuſammen zwei Rechte aus.

Je zwei innere Gegenwinkel ſind alſo ſo wie je zwei äußere zuſammenn immer gleich zwei Rechten.

35.

Steht die ſchneidende Linie ſenkrecht auf den Parallelen, wie in Fig. 23, ſo ſind ſämmtliche acht Winkel unter einander gleich, denn jeder von ihnen iſt ein rechter.

36.

Wenn man zu einer Linie AB eine Parallele ziehen will, ſo wird man eine Senkrechte PM Fig. 24 auf dieſelbe errichten, und ſenkrecht auf PM eine dritte Linie LN ziehen, welche parallel mit AB iſt, da die ſchneidende PM mit beiden Linien gleiche Winkel bildet.

37.

Durch den Punkt P aber kann offenbar nur eine gerade Linie parallel zu AB gezogen werden, denn wie man auch immer eine andere Linie PO ziehen mag, ſo wird dieſelbe nie die nöthige Bedingung des ſtets gleich weiten Abſtandes von AB erfüllen, und durch Verlängerung der beiden Linien ein Schneiden derſelben möglich werden (29).

Vierter Abſchnitt.

Aenderungen der Winkel eines Dreiecks, wenn deſſen Seiten ſich ändern. — Einer wächst, wenn der andere abnimmt. — Ihre Summe iſt immer dieſelbe, und ſtets gleich zwei Rechten. — Eine vierſeitige Figur. — Ihre Zerfällung in Dreiecke. — Die Summe ihrer Winkel immer dieſelbe, und ſtets gleich vier Rechten. — Derſelbe Schluß auf eine fünfſeitige Figur ausgedehnt. — Auf alle Figuren. — Beweisart für die Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke. — Größe der Winkel eines gleichſeitigen Dreiecks. — Eines rechtwinkligen Dreiecks.

38.

Denken wir uns ein Dreieck ABC Fig. 25, deſſen eine Seite BC zwar immer durch B geht, jedoch längs der verlängerten Seite AC ihre Stellung ändert. Welche Aenderung erfahren die Winkel bei B und C durch dieſe Bewegung der Seite BC? offenbar wächst der eine, wenn der andere abnimmt und umgekehrt. Entferne ich nämlich C von A, ſo wird der Winkel bei C immer kleiner, der bei B immer größer; nähere ich hingegen C dem Punkte A, ſo findet das Gegentheil Statt, der Winkel bei C nimmt zu, der bei B aber ab. Da nun überdieß der eine Winkel gerade ſo viel zunimmt, als der andere abnimmt, wovon man ſich durch unmittelbare Meſſung leicht überzeugt, ſo ändert ſich dadurch die Totalſumme der drei Winkel des Dreieckes nicht,

da ſie auf einer Seite wieder gewinnt, was ſie auf der anderen verloren.

Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes iſt alſo dieſelbe, wie man auch immer die einzelnen Winkel ändern mag.

So ſonderbar dieſer Satz auch auf den erſten Anblick iſt, wenn man die verſchiedenen Geſtalten, welche ein Dreieck annehmen kann, und wovon uns Fig. 26 mehrere Beiſpiele zeigt, betrachtet, ſo können wir uns doch leicht durch Meſſung der drei Winkel eines Dreieckes darüber in's Reine bringen.

Schneiden wir zu dieſem Behufe ein Dreieck in Papier aus, und von demſelben die drei Winkel a, b, c ab. Wenn wir jetzt dieſe drei Winkel mit ihren Scheiteln in einen Punkt zuſammenſtoßen, und die Schenkel der Winkel genau an einander legen, wie dieß Fig. 28 dargeſtellt iſt, ſo entſteht gleichſam ein Winkel, der den drei erſten zuſammen gleich iſt, und den wir nun meſſen wollen. Allein bei näherer Betrachtung ſehen wir, daß die zwei denſelben bildenden Schenkel OM und ON in einer geraden Linie liegen. Die drei Winkel machen alſo zuſammen zwei Rechte aus; denn, wenn ich auf der Geraden MN im Punkte O eine Senkrechte errichte, ſo werden zwei Winkel POM und PON gebildet, deren jeder ein rechter, und die zuſammen den drei Winkeln a, b, c gleich ſind. Und dieß gilt von jedem Dreieck, es mag was immer für eine Geſtalt haben.

Eine andere Art, ſich von der Wahrheit des hier Geſagten zu überzeugen, beſteht darin, daß man die drei Winkel eines in Papier ausgeſchnittenen Dreieckes auf eine der Seiten zuſammenbiegt, ſo daß ihre Scheitel ſich auf dieſer Linie alle in einem Punkte befinden. Thut man dieß nur mit einiger Vorſicht, ſo findet man, daß die Winkel mit ihren beiſammen liegenden Schenkeln genau an einander ſtoßen, und die äußeren Schenkel der beiden zu unterſt liegenden Winkel genau in jene Seite des Dreieckes fallen, zum Beweiſe, daß die drei Winkel zuſammen wirklich zwei Rechten gleich ſind.

Es drückt dieſer Satz eine der merkwürdigſten Eigenſchaften eines Dreieckes aus. Er ſoll von Pythagoras gefunden worden ſeyn, lang vor Euclid, und wurde ſeiner Allgemeinheit und ſeines Nutzens wegen, viel bewundert. Glücklicherweiſe iſt auch der ſtrenge Beweis dafür, ganz wie ihn Euclid gibt, ſo einfach, daß wir keinen Anſtand nehmen, ihn hier mitzutheilen:

Zieht man durch den Scheitel des Winkels a eines Dreieckes Fig. 29 eine Gerade MN, die zur Seite A des Dreieckes parallel iſt, ſo bildet dieſe Gerade mit den Seiten des Dreieckes zwei Winkel m und n. Da nun MN parallel iſt zu A, ſo müſſen die Winkel m und b, als Wechſelwinkel (29), einander gleich ſeyn. Daſſelbe gilt von den Winkeln n und c. Die drei Winkel m, a, n ſind alſo die drei Winkel des Dreieckes, ganz auf dieſelbe Art in

Bezug auf die Gerade MN angeordnet, wie es oben Fig. 28 der Fall war, wo wir die drei Winkel a, b, c gleich zwei Rechten fanden. Die drei Winkel eines Dreieckes ſind daher zuſammen ſtets gleich zwei Rechten.

Dieſer berühmte Lehrſatz iſt nicht minder merkwürdig ſeines unerwarteten Inhaltes, als der außerordentlichen Menge von Anwendungen und Folgerungen wegen, die aus ihm hervorgehen. Wir wollen hier einige der wichtigſten mittheilen.

39.

Ein Dreieck kann nie mehr als einen rechten Winkel haben; denn, da alle drei Winkel eines Dreieckes zuſammen immer zwei Rechten gleich ſind, ſo müſſen je zwei derſelben zuſammen kleiner, als zwei Rechte ſeyn. Ein ſolches Dreieck heißt ein rechtwinkliges.

40.

Noch viel weniger kann ein Dreieck einen rechten und einen ſtumpfen Winkel haben, da der letzte noch größer iſt, als ein rechter.

41.

Eben ſo wenig kann ein Dreieck zwei ſtumpfe Winkel haben, da dann dieſe mit einander, ohne den dritten Winkel, ſchon größer wären, als zwei Rechte.

42.

Wenn alſo in einem Dreiecke ein rechter oder ein ſtumpfer Winkel vorkommt, ſo müſſen die beiden anderen Winkel ſpitze ſeyn.

43.

Wenn zwei Winkel eines Dreieckes zuſammen einem rechten Winkel gleich ſind, ſo muß der dritte Winkel ein rechter ſeyn, da alle drei Winkel zwei rechte geben ſollen.

44.

Zieht man in einer vierſeitigen Figur ABCD Fig. 30 von einem Winkel zu einem gegenüberliegenden eine Gerade AC, ſo zerfällt die Figur in zwei Dreiecke ABC und ADC, und die ſechs Winkel dieſer Dreiecke werden von den vier Winkeln der vierſeitigen Figur gebildet; daraus folgt aber unmittelbar, daß dieſe Winkel der vierſeitigen Figur zuſammen vier Rechte ausmachen, und da jenes Zerfällen in zwei Dreiecke ſtets Statt finden kann, ſo gilt dieß allgemein von jeder vierſeitigen Figur, ihre einzelnen Seiten und Winkel mögen wie immer beſchaffen ſeyn.

Dieſe nicht minder merkwürdige Eigenſchaft von Vierecken, wie die oben bemerkte bei Dreiecken begreift ſich auch ganz leicht, wenn man z. B. vier Lineale an ihren Endpunkten um Stifte drehbar verbindet, ſo daß ſie eine vierſeitige Figur bilden, deren ganze Geſtalt man augenblicklich ändern kann, wenn man ein oder das andere Eck derſelben verſchiebt. Allein bei dieſer Verſchiebung ſieht man ſogleich, daß man keinen der vier Winkel verkleinern kann, ohne einen andern zu vergrößern und umge-

kehrt, daß alſo die Summe der vier Winkel (38) wahrſcheinlich ſtets dieſelbe bleibe. Man ſieht aber auch zugleich an dieſem Beiſpiele den Vorzug einer mathematiſchen Beweisart; während man auf dem eben angezeigten Wege nur die Wahrſcheinlichkeit einer ſolchen Eigenſchaft der Vierecke erfährt, und ſich hier erſt in umſtändliche Meſſungen einlaſſen muß, um am Ende doch nicht vollkommen überzeugt zu ſeyn, gibt unſere obige einfache Betrachtung nicht nur den höchſten Grad von Gewißheit, ſondern zugleich den Werth der beſtändigen Summe der Winkel eines Viereckes.

45.

Eine fünfſeitige Figur ABCDE Fig. 31 kann man ebenſo ſtets in drei Dreiecke zerfällen; es werden alſo die Winkel einer fünfſeitigen Figur zuſammen immer gleich ſechs Rechten ſeyn.

46.

Eine ſechsſeitige Figur werden wir auf gleiche Weiſe Fig. 32 durch drei Gerade AC, AD, AE ſtets in vier Dreiecke zerlegen können, ebenſo eine ſiebenſeitige Figur in fünf Dreiecke, eine achtſeitige in ſechs u. ſ. w.

Vergleichen wir nun bei jeder einzelnen der hier betrachteten Figuren die Anzahl Seiten der Figur mit der Anzahl Dreiecke, in die man dieſelbe zerfällen kann, ſo ergibt ſich daraus, daß die letzte immer um zwei geringer iſt, als die erſte. Dieß

wird nun für alle Figuren gelten, da es ſeinen Grund offenbar darin hat, daß für jedes der Dreiecke, in welche man die Figur zerfällt, eine Seite der Figur in Anſpruch genommen wird, ausgenommen die beiden äußerſten Dreiecke, deren jedes zwei Seiten der Figur in Anſpruch nimmt. Es wird alſo z. B. eine zwölfſeitige Figur in zehn Dreiecke zerfällt werden können, und folglich werden, da die Winkel jedes Dreieckes zwei Rechten gleich ſind, die Winkel einer zwölfſeitigen Figur zuſammen ſtets zwanzig Rechte bilden.

Es ergibt ſich alſo daraus folgende allgemeine Regel für die Beſtimmung der Summe der Winkel einer vielſeitigen Figur:

Man vermindere die Zahl der Seiten der fraglichen Figur um zwei, multiplizire den Reſt mit zwei, um ſofort die Anzahl rechter Winkel zu erhalten, welcher alle Winkel der Figur zuſammen gleich ſind.

Es gibt uns übrigens das eben Geſagte ein Beiſpiel von der Richtigkeit unſerer obigen Bemerkung (16), wie ſehr nämlich durch die Lehre von den Dreiecken die Betrachtungen der übrigen Figuren vereinfacht werden, wie denn hier der einzige Satz über die Summe der drei Winkel eines Dreieckes analoge Eigenſchaften bei jeder von geraden Linien gebildeten Figur uns mit der größten Leichtigkeit kennen lehrte, die auf anderen Wegen zu erforſchen gewiß ſehr ſchwierig und umſtändlich geweſen wäre.

47.

Wenn zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines anderen gleich ſind, ſo müſſen auch die dritten Winkel einander gleich ſein, denn von beiden dritten Winkeln muß jeder zu jenen zwei Winkeln gefügt zwei Rechte ausmachen.

48.

Wenn man alſo von zwei Dreiecken nachweiſen will, daß ſie durchaus gleiche Winkel haben, ſo hat man dieß nur von zwei Winkeln zu thun nöthig, da ſich die Gleichheit des dritten dann von ſelbſt verſteht.

49.

Wenn ein und daſſelbe Dreieck drei unter einander gleiche Winkel hat, ſo muß jeder derſelben einem Drittheile von zwei Rechten, oder zwei Drittheile eines Rechten betragen.

50.

Jeder Winkel eines gleichſeitigen Dreieckes beträgt alſo zwei Drittheile eines Rechten, da nach (27) bei einem gleichſeitigen Dreiecke ſtets auch die Winkel unter einander gleich ſind.

51.

Daß wir übrigens oben (49) zwei Dritttheile von einem Rechten einem Drittheile von zwei

Rechten gleich ſetzen, bedarf wohl kaum einer weiteren Erklärung: denn drei Drittheile eines Rechten machen einen Rechten, ſechs Drittheile alſo zwei Rechte; davon aber beträgt das Drittheil zwei Drittheile eines Rechten.

Fünfter Abſchnitt.

Abhängigkeit der Größe der Seite eines Dreiecks von der Größe des gegenüberliegenden Winkels. — Grenzen der Summe und Differenz zweier Seiten im Vergleiche mit der dritten Seite.

52.

Betrachten wir die Fig. 33, 34, u. 35 verzeichneten Dreiecke, in welchen, wie man ſieht, die mit A bezeichneten Seiten, ſo wie die mit B bezeichneten einander gleich ſind, jedoch ſehr verſchiedene Winkel c einſchließen, den kleinſten in Fig. 33, einen größeren in Fig. 34, den größten in Fig. 35. Die dieſem Winkel c gegenüberliegende Seite nimmt ebenfalls ſtets zu, gerade ſo, als wenn man die Backen einer Scheere mehr und mehr öffnet, die Spitzen derſelben ſich gleichfalls immer mehr und mehr von einander entfernen, wobei man, um das Gleichniß unſerem Falle ganz ähnlich zu machen, die eine Backe als gebrochen, alſo gegen die andere ungleich lang an-

nehmen kann; daraus ergibt ſich denn folgender Lehrſatz, zu dem Euclid eines ziemlich umſtändlichen Beweiſes bedarf:

Wenn zwei oder mehrere Dreiecke je zwei Seiten gleich haben, wie hier die Seiten A und B, ſo iſt die dritte Seite C größer oder kleiner, je nachdem der gegenüberliegende Winkel größer oder kleiner iſt.

53.

Wenn man die Seiten A und B einander nähert, bis der Winkel c verſchwindet, was wird dann aus der Seite C? — Betrachten wir wieder unſer Gleichniß mit der Scheere; wenn ihre Backen gleich lang ſind, und ich ſchließe ſie, ſo fallen die Spitzen zuſammen, ihre Diſtanz, oder die Seite C des Dreieckes iſt null; wenn aber die Backen ungleich lang ſind, und ich ſchließe ſie, ſo wird die Diſtanz der Spitzen, d. h. die Seite C des obigen Dreieckes offenbar dem Unterſchiede der beiden Backen d. h. den Seiten A und B gleich ſeyn.

Wenn man hingegen die Seiten A und B von einander entfernt, bis ſie in dieſelbe gerade Gerade zu ſtehen kommen, wie dieß Fig. 36 der Fall iſt, wie geſtaltet ſich dann die Seite C? — Dieſelbe wird dann offenbar gleich der Summe der beiden Seiten A und B.

Daraus ſehen wir, daß, indem man zwei Seiten eines Dreieckes von einander entfernt, die dritte

Seite immer größer, und endlich der Summe jener beiden Seiten gleich wird; diesen Werth aber kann sie nicht überschreiten. Nähert man aber zwei Seiten eines Dreieckes einander, so wird die dritte Seite immer kleiner, und endlich dem Unterschiede jener beiden Seiten gleich; unter diesen Werth kann sie nicht abnehmen.

Da aber die beiden Grenzwerthe nicht einmal erreicht werden dürfen, wenn die Figur nicht aufhören soll, ein Dreieck zu seyn, und z. B. für den ersten Fall höchstens von einem sehr gestreckten Dreiecke, wie Fig. 37 es darstellt, die Rede seyn kann, in welchem die Seite C der Summe der Seiten A und B nahe, wenn auch nicht genau gleich ist, so erhalten wir dadurch folgenden Lehrsatz:

54.

In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, und ihr Unterschied kleiner, als die dritte Seite.

Sechster Abschnitt.

Parallele Linien. — Parallelogram. — Aenderungen der Winkel bei ungeänderten Seiten. — Die einander gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich. — Parallel-Lineal. — Diagonalen. — Rechtecke. — Verschiedene Eigenschaften der Parallelograme.

55.

Gesetzt es wären uns vier Streifen von Kartenpapier Fig. 38 gegeben, von denen immer je zwei, A und A', so wie B und B', einander gleich sind, und man bilde daraus eine vierseitige Figur Fig. 39 so, daß die gleichen Seiten einander gegenüber stehen, und man sie doch sämmtlich etwa um Stifte, die sie in den Ecken verbinden, drehen kann, beiläufig wie die Backen einer Scheere. Wir sehen, daß der Figur auf diese Art die mannigfaltigsten Gestalten gegeben werden können, wovon Fig. 40 uns ein Beispiel zeigt *).

Schon der erste Anblick zeigt, daß die gegenüberliegenden Seiten dieser Figur, aller eben erwähnter Verschiebungen ungeachtet, stets parallel zu bleiben scheinen. Wir könnten hiervon wieder z. B. durch

*) Wären nur drei Streifen mit einander verbunden, so wäre diese Veränderlichkeit der Figur nicht vorhanden, und die einzelnen Streifen hielten vollkommen fest; bei jeder mehrseitigen Figur hingegen tritt jene Veränderlichkeit ein.

unmittelbare Meſſung des ſenkrechten Abſtandes zweier ſolcher gegenüberliegenden Seiten in verſchiedenen Punkten derſelben, der nach (29) überall gleich ausfallen müßte, uns überzeugen, allein der folgende geometriſche Beweis dafür wird viel einfacher und ſchlagender zugleich ſeyn.

Sey ABCD eine ſolche vierſeitige Figur Fig. 41 und ziehen wir von B nach D eine Gerade, welche jene vierſeitige Figur in zwei Dreiecke theilt. Die Seite BD iſt beiden Dreiecken gemeinſchaftlich, die Seite AB iſt gleich der Seite CD, der Annahme zufolge, und ebenſo die Seite BC der Seite AD. Die beiden Dreiecke haben alſo gleiche Seiten, folglich ſind ſie congruent, und daher auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich (19). Es iſt alſo der Winkel DBC gleich dem Winkel BDA; da dieſe Winkel aber für die ſchneidende Linie BD Wechſelwinkel ſind (30), ſo müſſen die Seiten BC und AD parallel ſeyn. Daſſelbe folgt für die Seiten AB und CD aus der Gleichheit der Winkel BDC und DBA. Es ſind alſo die einander gegenüber liegenden Seiten einer ſolchen Figur parallel.

56.

Die Linie BD, die von einem Winkel der Figur zum anderen gezogen wurde, heißt Diagonale.

57.

Da, wenn die Seiten des Viereckes Fig. 41 aufhören, paarweiſe gleich zu ſeyn, die Congruenz

der beiden Dreiecke, und somit auch die Gleichheit der Wechselwinkel an der Diagonale aufhört, so werden dann auch die einander gegenüber liegenden Seiten nicht mehr durchaus parallel seyn, und man wird höchstens für eine gewisse Stellung der Seiten zwei derselben, aber durchaus nicht alle vier, paarweise parallel machen können. Es bleiben daher nur in einer solchen vierseitigen Figur, in der die gegenüber liegenden Seiten durchaus gleich sind, dieselben auch durchaus zu einander parallel.

58.

Diese Figur kommt sowohl in der Geometrie, als im gemeinen Leben sehr häufig vor, und hat von ihrer Haupteigenschaft, die gegenüber liegenden Seiten stets parallel zu haben, den eigenen Namen: Parallelogram erhalten. Thüren, Fenster, Wände, Fußböden u. s. w. sind durchaus in Parallelogramen, und zwar meistens in solchen gestaltet, deren Winkel durchaus Rechte sind. Auch ist eine kleine Vorrichtung, die wohl jeder unserer Leser unter dem Namen des Parallel-Lineales kennt, im Grunde nur eine Anwendung der eben betrachteten Eigenschaft des Parallelograms. Es besteht dasselbe nämlich in zwei Linealen AB und CD Fig. 42, die durch zwei gleich lange Stücke EF und GH verbunden sind; diese Stücke drehen sich um Stifte, die in gleichen Entfernungen EH und FG

von einander auf beiden Linealen sich befinden. Man mag nun die beiden Lineale wie immer von einander entfernen, oder einander nähern, stets bleiben sie parallel, so daß, wenn man das eine derselben an eine auf dem Papier verzeichnete gerade Linie anlegt, eine längs dem anderen Lineale gezogene Gerade zur ersten stets parallel ist. Die Richtigkeit dieses Instrumentes hängt, wie wir aus obigem wissen, von der Gleichheit der Abstände EH und FG, und der Stücke EF und HG ab.

59.

Das am meisten vorkommende Parallelogram ist dasjenige, dessen Winkel durchaus Rechte sind, es heißt Rechteck.

Dabei muß Jedermann auffallen, daß die Winkel solcher Rechtecke durchaus Rechte sind, und man nicht etwa bloß einen Winkel einen rechten, die übrigen aber stumpf oder spitz seyn lassen kann. Bei näherer Betrachtung aber findet man diesen Umstand als unzertrennlich von der Eigenschaft eines Parallelogrames. Sey ABCD Fig. 43 eine solche Figur und B ein rechter Winkel, so muß schon wegen der Congruenz der Dreiecke ABD und ACD (55) der gegenüber liegende Winkel C ebenfalls ein rechter seyn; aber auch die Winkel D und A sind nothwendig Rechte; denn jeder derselben ist durch die Diagonale AD in zwei Winkel getheilt, deren einer ein Winkel von einem der beiden Dreiecke an der Seite AD, und

deren anderer dem anderen Winkel deſſelben Dreieckes an derſelben Seite AD gleich iſt. Die zwei Winkel, in die ſowohl A als D durch die Diagonale getheilt wird, machen alſo auch zuſammen gerade ſo viel aus, als die beiden Winkel an der Seite AD in jedem der zwei Dreiecke. Dieſe Dreiecke aber haben jedes einen rechten Winkel, eines in B und das andere in C; es müſſen alſo die beiden anderen Winkel (43) jedes Dreieckes, ſomit auch die zwei Winkel, aus denen jeder der Winkel A und D beſteht, zuſammen einen Rechten bilden. Sobald demnach in einem Parallelograme nur ein rechter Winkel B vorkommt, müſſen alle übrigen Winkel deſſelben ebenfalls Rechte, und das Parallelogram ein Rechteck ſeyn. Man kann ſtets je zwei Winkel an einer Seite eines Parallelogrames als innere Gegenwinkel (33) betrachten; je zwei Winkel an einer Seite eines Parallelogrames machen alſo zuſammen immer zwei Rechte (34), oder die Hälfte des Geſammtbetrages (44) der vier Winkel eines Parallelogrammes aus. Auch daraus folgt, was wir oben eben auf andere Weiſe ableiteten, nämlich, daß, wenn ein Winkel ein rechter iſt, es alle übrigen ebenfalls ſeyn müſſen; denn der zunächſt liegende Winkel der Figur muß mit dem Rechten zwei Rechte machen, ſelbſt alſo auch ein Rechter ſeyn; daſſelbe gilt vom dritten in Beziehung auf den zweiten Winkel u. ſ. f. Allein es folgt daraus noch weiter, daß, wie wir ſchon oben (43) erwähnten, wenn man die

Winkel eines Parallelogrames ändert, ein Winkel immer gerade ſo viel zu-, als der ihm nächſte Winkel abnimmt, und umgekehrt, oder daß je zwei gegenüber liegende Winkel ſtets einander gleich bleiben, da nämlich dieſe Winkel im Rechtecke einander offenbar gleich ſind, und dann immer zu gleicher Zeit und in gleichem Maaße wachſen und abnehmen. Endlich ſehen wir daraus auch, daß ein Parallelogram nicht durchaus ſpitze Winkel haben kann; denn je zwei ſpitze Winkel können nicht zwei Rechten gleich ſeyn; ſondern wenn der eine ein ſpitzer, muß der nächſte ein ſtumpfer, der dritte wieder ein ſpitzer, der vierte ein ſtumpfer ſeyn.

Wir wollen der beſſeren Ueberſicht wegen die wichtigſten der eben abgeleiteten Sätze über das Parallelogram hier zuſammenſtellen:

60.

1. Die einander gegenüber liegenden Seiten ſind gleich.

61.

2. Ebenſo die einander gegenüber liegenden Winkel.

62.

3. Je zwei einander nächſte Winkel machen zuſammen zwei Rechte.

63.

4. Jede Diagonale theilt das Parallelogram in zwei congruente Dreiecke.

64.

5. Iſt ein Winkel ein Rechter, ſo müſſen es alle ſeyn, und das Parallelogram iſt ein Rechteck.

Siebenter Abſchnitt.

Beſtimmung des Flächeninhaltes eines Parallelograms. — Zerfällung gleicher Parallelograme.

65.

Man verzeichne über derſelben Linie AD Fig. 44 mehrere Parallelograme ſo, daß ihre obere Seiten BC alle in einer zu AD parallelen Geraden liegen, während das erſte Parallelogram ein Rechteck iſt, und die anderen Figuren immer ſchiefere Lagen erhalten. Man ſagt von ſolchen Figuren, daß ſie gleiche Baſis und gleiche Höhe haben, wo man unter Baſis die allen gemeinſchaftliche Seite AD und unter Höhe eine Senkrechte von der oberen Seite BC auf die untere AD oder auf deren Verlängerung verſteht, welche offenbar für alle dieſe Figuren dieſelbe und zwar gleich der Seite CD des Rechteckes iſt (28).

Welche dieſer Figuren hat nun wohl den größten Flächenraum? wenn z. B. jede von ihnen die

Geſtalt des Fußbodens eines Zimmers angäbe, für welches derſelben bedürfte man am meiſten Teppiche, um den Boden zu bedecken? Die Entſcheidung dieſer Frage ſcheint für den erſten Augenblick nicht ſo leicht, da die ſchiefen Figuren zwar immer länger, aber auch immer ſchmäler werden.

Denken wir uns einen Pack Spielkarten, und ſtelle uns Fig. 45 eine Seitenfläche dieſes Packes vor, wenn die Karten alle ſenkrecht über einander geſchlichtet ſind. Dieſe Figur wird offenbar ein Rechteck ſeyn, und ihr Flächenraum von der Anzahl und Länge der Karten abhängen.

Verſchieben wir nun die Karten, ſo daß dieſelbe Seitenfläche jetzt durch Fig. 46 vorgeſtellt werden kann, alſo ein Parallelogram iſt. Da man weder die Anzahl, noch die Länge der Karten geändert hat, ſo muß dieſe neue Figur offenbar denſelben Flächenraum, wie jene frühere, haben u. ſ. f. für jede weitere Verſchiebung der Karten.

Was aber hier Anzahl und Länge der Karten, iſt bei uns Höhe und Baſis der Figur, und es bleibt ſomit der Flächenraum eines Parallelograms ſtets derſelbe, ſo lange Höhe und Baſis dieſelben bleiben, oder man wird, um unſer früheres Gleichniß wieder aufzunehmen, für die oben erwähnten verſchiedenen Zimmer überall gleich viel Teppichſtoff brauchen, um ihre Fußböden zu bedecken.

So klar dieß ſchon jetzt unſeren Leſern ſeyn mag, ſo wollen wir doch noch eine zweite Darſtellung verſuchen.

Seyen Fig. 47 und 48 ein Rechteck und ein Parallelogram von gleicher Baſis und gleicher Höhe. Man theile das Parallelogram in drei Theile auf folgende Art: man ziehe eine auf EF ſenkrechte Linie FI, nehme FK gleich EI, und ziehe von K eine Senkrechte KL auf GH.

Ebenſo theile man das Rechteck in drei Theile, indem man BM gleich FI nimmt, dann DO gleich GL, und DN gleich LK, und die Linien AM und NO zieht.

Bezeichnet man die einzelnen Stücke nach der Reihe, wie es hier geſchah, mit 1, 2, 3 in beiden Figuren, ſo kann man ſchon hier geometriſch die Gleichheit der Dreiecke 1 und 3 nachweiſen. Denn für 1 im Rechtecke ſind zwei Seiten MB und AB und der eingeſchloſſene Winkel B den zwei Seiten IF und EF von 1 im Parallelograme mit dem eingeſchloſſenen rechten Winkel gleich, folglich beide Dreiecke 1 congruent, u. ſ. f. für 3; durch weitere zweckmäßige Zerfällung der Räume 2 wird man im Parallelograme Figuren erzeugen, für deren jede eine congruente im Rechtecke nachzuweiſen iſt. Indeß gelangen wir viel ſchneller zum Ziele, wenn wir bei der bisher ausgeführten Zerfällung ſtehen bleiben, und die Figuren demgemäß in Papier ausſchneiden, wo wir dann ſehen, daß die mit denſelben

Ziffern bezeichneten Stücke ſich genau decken, alſo wirklich Rechteck, wie Parallelogram, gleichen Flächenraum haben.

Dieſe Zerfällung wird nicht immer dieſelbe bleiben, aber ſtets wird eine ſolche möglich ſeyn. Betrachten wir z. B. das ſehr geneigte Parallelogram Fig. 49, und das Rechteck Fig. 50 von gleicher Baſis und Höhe, ſo reichen wir hier mit obiger Zerfällung nicht mehr aus, und müſſen beide auf folgende Art in fünf Theile theilen, um zum Ziele zu gelangen:

Man ziehe in Fig. 49, wie früher, FI ſenkrecht auf FE, nehme FK gleich EI, ziehe KL parallel mit FI, nehme KM gleich EI, und ziehe MN parallel zu FI, nehme MO gleich EI, und ziehe OP parallel zu FI, und bezeichne endlich die ſo entſtandenen Figuren nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5.

Ebenſo nehme man in Fig. 50 BQ gleich FI, und ziehe AQ, nehme ferner AR gleich BQ, und ziehe RS parallel zu AQ, nehme wieder RT gleich BQ, und ziehe TU parallel zu AQ, endlich nehme man TV gleich BQ, und ziehe VW parallel zu AQ, und bezeichne die ſo entſtandenen Figuren nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5.

Schon aus der bloßen Anſicht dieſer Figuren ſieht man, daß die im Parallelogram und im Rechtecke gleich bezeichneten Stücke einander auch gleich ſind, nud kann ſich davon überdieß durch Deckung überzeugen.

Parallelograme haben alſo gleichen Flächenraum, wenn ſie gleiche Baſis und gleiche Höhen haben.

Achter Abſchnitt.

Numeriſcher Ausdruck des Flächeninhaltes eines Parallelogrames. — Seine Zerfällung in Quadrate. — Parallelograme laſſen ſich ſtets auf Rechtecke bringen. — Numeriſcher Ausdruck für die Fläche eines Dreiecks. — Für die Fläche anderer Figuren.

66.

Aus dem Vorhergehenden wiſſen wir, daß die Größe eines Parallelograms oder beſſer der Raum, den die Seiten eines Parallelograms umfaſſen, lediglich von ſeiner Baſis und Höhe, und durchaus nicht von weiteren Eigenſchaften ſeiner Geſtalt abhängt. Dieſer Umſtand ſetzt uns in den Stand, die Größe aller von geraden Linien eingeſchloſſenen Figuren auf eine äußerſt einfache Art zu beſtimmen.

Verſuchen wir dieß zuerſt mit einem Rechtecke Fig. 51, welches das verjüngte Bild eines größeren Rechteckes vorſtelle, deſſen Baſis AB z. B. drei Zolle, und deſſen Höhe AD fünf Zolle beträgt. Es ſeyen dieſe Zolle wieder im verjüngten Maaßſtabe

auf die beiden Seiten AB und AD, wie man dieß hier ſieht, durch die Punkte E, F und G, H, I, K aufgetragen.

Durch die Theilung der Linie AB zerfällt das Rechteck, wenn man die Linien EL, FM ſenkrecht auf AB zieht, in drei ſchmale Rechtecke AELD, EFML, und FBNM, die einander gleich ſind, da ſie gleiche Baſis und gleiche Höhe haben.

Durch die Theilung der Linie AD zerfallen dieſe ſchmalen Rechtecke, wenn man die Linien KO, IP, HQ, GR ſenkrecht auf AD zieht, jedes in fünf noch kleinere Rechtecke, die wieder einander gleich ſind, da ſie alle einen Zoll hoch und einen Zoll breit ſind. Solche Rechtecke aber, die eben ſo breit, als hoch ſind, nennt man Quadrate, und wenn, wie hier, eine Seite einen Zoll beträgt, Quadratzolle; beträgt eine Seite einen Fuß, ſo heißen ſie Quadratfuße u. ſ. w.

Unſer urſprüngliches Rechteck ABND, das zur Baſis 3 Zolle, und zur Höhe 5 Zolle hat, enthält 15 Quadratzolle, denn es kommen in demſelben drei ſenkrechte Reihen von Quadratzollen vor, deren jede fünf Quadratzolle faßt.

Würde das Rechteck ABND eine Baſis von vier Zollen haben, ſo gäbe es vier ſolcher ſenkrechter Reihen, deren jede fünf Quadratzolle hat, und das Rechteck ABND enthielte viermal fünf oder zwanzig Quadratzolle.

Wenn man alſo den Raum beſtimmen will, den ein Rechteck mit ſeinen Seiten umfaßt, ſo darf man nur wiſſen, wie viele Zolle, Fuße u. ſ. w. die Baſis, und wie viel Zolle, Fuße u. ſ. w. die Höhe deſſelben hat. Das Produkt dieſer beiden Zahlen wird die Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. ſ. w. geben, welche das Rechteck enthält. So wird z. B. ein Rechteck, deſſen Baſis 10 Zolle, und deſſen Höhe 15 Zolle mißt, 150 Quadratzolle enthalten.

67.

Da uns aber aus dem Vorhergehenden bekannt iſt, daß Parallelograme mit Rechtecken gleichen Raum umfaſſen, wenn ſie mit denſelben gleiche Baſis und Höhe haben, ſo wird die eben gegebene Regel auch für Parallelograme gelten, und man wird allgemein den Raum eines Parallelogrames, mag daſſelbe rechtwinklig oder ſchiefwinklig ſeyn, finden, indem man die Baſis deſſelben mit der Höhe multiplicirt. Die ſo erhaltene Zahl aber wird Quadratzolle oder Quadratfuße u. ſ. w. geben, je nachdem man die Baſis und Höhe der Figur in Zollen oder Fußen u. ſ. w. gemeſſen hat.

68.

Aus 55. wiſſen wir, daß ein Parallelogram immer in zwei einander gleiche Dreiecke zerlegt werden kann, oder, was daſſelbe iſt, daß man

ſich ein Dreieck ſtets als die Hälfte eines Parallelogrames denken kann, das eine Seite des Dreieckes zur Baſis, und die Höhe des Dreieckes zur Höhe hat (wo man unter Höhe des Dreieckes die Senkrechte von dem Scheitel des der Baſis gegenüber liegenden Winkels auf die Baſis oder deren Verlängerung zu verſtehen hat). In der That kann man mit jedem Dreiecke, indem man ein congruentes ſchicklich an daſſelbe anlegt, ein Parallelogram bilden. Es wird demnach der Flächeninhalt, wie man den von einer Figur eingenommenen Raum nennt, eines Dreieckes dem halben Produkte der Baſis in die Höhe des Dreiecks gleich ſeyn. Wenn z. B. die Baſis des Dreiecks 4 Zoll, die Höhe 5 Zoll beträgt, ſo iſt der Flächeninhalt des Dreieckes 10 Quadratzolle.

69.

Man kann aber mit derſelben Baſis und Höhe eine Menge Dreiecke Fig. 52 conſtruiren, die alſo alle gleichen Flächeninhalt haben. So ſonderbar dieß beim erſten Anblicke der verſchiedenen Geſtalten dieſer Figuren ſcheint, ſo natürlich erklärt es ſich doch auch wieder aus dem Erſatze durch größere Länge bei kleinerer Breite der Figur und umgekehrt.

Ein anderer ſcheinbarer Anſtand ergibt ſich aus der Betrachtung, daß man bald die, bald jene Seite eines Dreieckes als Baſis annehmen kann, und doch immer denſelben Flächeninhalt bekommen

ſoll. Allein auch hier findet eine Ausgleichung eben dadurch ſtatt, daß auch die Höhe des Dreieckes immer wieder verſchieden ausfällt, wenn man andere Seiten zu Baſen wählt, am größten wird, wenn man die kleinſte Seite zur Baſis nimmt, und am kleinſten, wenn man die größte dazu macht. Betrachten wir z. B. das Dreieck ABC Fig. 53, und ſuchen wir zuerſt ſeinen Flächeninhalt in derjenigen Stellung deſſelben, wo die Seite AB als Baſis erſcheint. Geſetzt, dieſe Seite AB habe neun Zolle, was wir hier durch die Theilungspunkte anzeigten. Um die Höhe des Dreieckes für dieſe Lage deſſelben zu finden, verlängere man nach 68 die Seite AB über D hinaus, und fälle von C eine Senkrechte CD, welche uns nun die Höhe des Dreieckes vorſtellt. Dieſe Linie CD aber enthält genau zwei ſolcher Theile, wie die Linie AB ihrer neun hatte, iſt alſo zwei Zolle lang, wenn jene neun Zolle hatte. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt alſo die Hälfte von achtzehn oder neun Quadratzolle.

Dreht man nun das Dreieck um, ſo daß die Seite AC, die drei Zolle mißt, nach unten zu liegen kommt, und alſo jetzt die Baſis vorſtellt, ſo wird man nun dieſe Seite verlängern, und BE ſenkrecht darauf fällen, und es iſt die Linie BE die Höhe des Dreieckes für dieſe neue Lage deſſelben. Dieſe Linie aber enthält genau ſechs ſolcher Theile, wie AB neun, und AC drei enthielt, iſt alſo ſechs Zolle lang, wenn ein ſolcher Theil einen Zoll

vorſtellt. Die Baſis des Dreieckes hat alſo jetzt drei Zolle, die Höhe ſechs Zolle; der Flächeninhalt des Dreieckes beträgt daher wieder, genau wie früher, die Hälfte von achtzehn oder neun Quadratzollen.

Daſſelbe Reſultat fände man endlich, wenn man die dritte Seite BC als Baſis annähme, wo dann die von A auf BC ſenkrechte Linie AF die Höhe vorſtellte; nur werden dann dieſe beiden Linien nicht wie in den beiden eben betrachteten Fällen eine ganze Anzahl Zolle, ſondern überdieß gewiſſe Bruchtheile von Zollen enthalten, aber immer wird das halbe Produkt der beiden Zahlen gleich neun (Quadratzollen) ſeyn.

70.

Da ſich jede von geraden Linien gebildete Figur in Dreiecke zerlegen läßt (44 u. f.), ſo kann man, wenn man einmal den Flächeninhalt eines Dreieckes beſtimmen kann, auch den jeder anderen Figur angeben, indem man die Flächeninhalte der dieſelbe bildenden Dreiecke ſummirt. Es iſt dieß ein weiterer Beweis davon, wie wichtig es iſt, die Natur eines Dreieckes früher zu unterſuchen, bevor man auf die Betrachtung anderer Figuren übergeht.

71.

Nach 66. iſt ein Quadrat ein Rechteck mit durchaus gleichen Seiten. Wenn alſo die Baſis eines Quadrates z. B. fünf Zolle hat, ſo hat auch ſeine Höhe fünf Zolle, und das Quadrat enthält

fünfmal fünf oder fünf und zwanzig Quadratzolle. Um daher den Flächeninhalt eines Quadrates zu erhalten, hat man nur die Anzahl Zolle, Fuße u. ſ. w. einer Seite deſſelben mit ſich ſelbſt zu multipliciren, und erhält ſofort die Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. ſ. w., welche das Quadrat enthält.

Hierin liegt der Grund, weßhalb man in der Arithmetik das Produkt einer Zahl mit ſich ſelbſt das Quadrat derſelben nennt. So heißen die Zahlen 4, 9, 16, 25, 36 u. ſ. w. die Quadrate der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 u. ſ. w., weil, wenn die letzten Zahlen das Ausmaaß der Seite eines Quadrates bedeuten, jene die Größe oder den Flächeninhalt des ganzen Quadrates geben.

Neunter Abſchnitt.

Merkwürdige Eigenſchaften eines rechtwinkligen Dreieckes. — Die Quadrate der Katheten zuſammen gleich dem Quadrate der Hypothenuſe (Eſelsbrücke). — Beweis durch Zerfällung. — Andere Beweiſe. — Zerfällung des Quadrates einer eingetheilten Linie. — Um wie viel überſteigt das Quadrat der Linie die Quadrate ihrer Theile?

72.

Eine der merkwürdigſten Entdeckungen in der Mathematik bezieht ſich auf eine Eigenſchaft der

Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes (38), die wir nun im Folgenden kennen lernen wollen.

Man nennt die Seite eines rechtwinkligen Dreieckes, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypothenuſe. Wir haben nun hier Fig. 54 mehrere rechtwinklige Dreiecke mit derſelben Hypothenuſe AB verzeichnet. Man ſieht, daß wie eine der beiden veränderlichen Seiten AC und BC abnimmt, die andere wächst und umgekehrt. Von ähnlichen Fällen, die wir ſchon früher kennen lernten, zu ſchließen, iſt man für den erſten Anblick verleitet, zu glauben, daß die Summe dieſer beiden Seiten ſtets dieſelbe iſt; allein ſchon bei einer nur etwas genaueren Unterſuchung überzeugt man ſich von der Irrigkeit dieſer Vorausſetzung.

Verzeichnet man hingegen auf den Seiten AC und BC, die man Katheten nennt, Quadrate, ſo findet man, daß die Summe der Flächeninhalte dieſer Quadrate ſtets dieſelbe, und zwar immer dem Flächeninhalte des über der Hypothenuſe conſtruirten Quadrates gleich iſt.

Man ſchneide ſich drei gerade Papierſtreifen zu, den einen drei, den andern vier, und den dritten fünf Zolle lang, und lege ſie in ein Dreieck zuſammen, ſo bemerkt man, daß der von den beiden kürzeren Seiten eingeſchloſſene Winkel ein rechter, und folglich jenes Dreieck ein rechtwinkliges iſt. Verzeichnet man nun über jede der Seiten ein Quadrat, ſo

faſſen dieſe Quadrate nach der Reihe neun, ſechszehn und fünf und zwanzig Quadratzolle, und es iſt wirklich die Summe der Quadrate der Katheten (nämlich 9 und 16 Quadratzolle) gleich dem Quadrat der Hypothenuſe (nämlich 25 Quadratzollen).

Schneidet man ſich ebenſo drei andere Streifen von Papier aus, die nach der Reihe 5, 12 und 13 Zolle lang ſind, ſo findet man erſtens wieder, daß, wenn man dieſelben zu einem Dreiecke zuſammenlegt, der von den kürzeren Seiten gebildete Winkel ein rechter iſt, und zweitens, daß die Summe der Quadrate dieſer beiden Katheten (nämlich 25 Quadratzolle und 144 Quadratzolle) dem Quadrate der Hypothenuſe (nämlich 169 Quadratzollen) gleich kommt. Schon dieſe beiden einzelnen Fälle geben einen ziemlich klaren Begriff von der Richtigkeit des Satzes, aber wir wollen uns von der allgemeinen Gültigkeit deſſelben auf einem ähnlichen Wege, wie eben bei den Parallelogramen (65), zu überzeugen ſuchen.

Wir haben hier ein genau rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 55) verzeichnet, und auf die Seiten deſſelben Quadrate errichtet. Theilen wir nun zuerſt das Quadrat über der Kathete AC in drei Theile 1, 2, 3, indem wir von D eine Linie DE parallel zu AB, und von A eine Linie AF ſenkrecht auf DE führen. Ferner werde das Quadrat über der Kathete BC in vier Theile 4, 5, 6, 7 dadurch getheilt, daß man von G eine Linie GH parallel zu AB, und

von B eine Linie BI ſenkrecht auf GH führt, ferner einen Abſtand GK gleich BH nimmt, und eine Linie KL parallel zu GH, oder was daſſelbe iſt, zu AB zieht. Endlich zerſchneide man das Quadrat über der Hypothenuſe AB in ſieben Stücke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, indem man zuerſt von C eine auf AB ſenkrechte Linie CP führt, welche das Quadrat der Hypothenuſe in zwei länglichte Rechtecke theilt; dann ziehe man von N eine Linie NM parallel zu AC, und verbinde die Punkte M und R, verlängere weiter die Linie DA bis ſie auf NM trifft, und ebenſo die Linie BG bis ſie OP ſchneidet, nehme endlich einen Abſtand RS gleich KL, und ziehe SQ ſenkrechtauf MR.

Vergleicht man nun die vielen kleinen Figuren, die auf dieſe Art entſtanden, mit einander, ſo findet man, daß die mit gleichen Ziffern bezeichneten auch einander vollkommen gleich ſind, und daß folglich, wenn man die Figuren in den Quadraten der beiden Katheten über die gleichziffrigen in dem Quadrate der Hypothenuſe legt, eine vollkommene Deckung dieſes letzten hervorgebracht wird, wovon man ſich durch Ausſchneiden der Figur 55 in allen ihren Theilen leicht überzeugen kann.

Zugleich iſt hieraus erſichtlich, daß die von der Linie OP gebildeten Rechtecke ſtückweiſe den Quadraten der Katheten gleich ſind, da in je zwei dieſer Figuren die gleichen Nummern vorkommen.

Eine ſolche Eintheilung der Quadrate wird im Allgemeinen, wie man von ſelbſt ſieht, ſtets möglich

seyn; da aber doch in manchen Fällen das kleinere Quadrat über BC in mehr als vier Theile, wie es hier geschah, zerlegt werden muß, so wollen wir noch einen anderen Beweis hersetzen, der völlig allgemein ist.

Wir haben in Fig. 56 die drei Quadrate, wie früher, auf den Seiten des rechtwinkligen Dreieckes ABC errichtet, jedoch das Quadrat der Hypothenuse über, statt unter dieselbe gestellt, so daß das Dreieck ABC selbst einen Theil des großen Quadrates bildet.

Schneiden wir nun dieses Dreieck aus, und legen wir es auf die obere Seite DF des großen Quadrates (Fig. 57), so wird offenbar dadurch dieß große Quadrat in eine sechsseitige Figur ADEFBC verwandelt, die einen einspringenden Winkel ACB und einen vorspringenden DEF, übrigens mit dem großen Quadrate gleichen Flächeninhalt hat. Ziehen wir jetzt von C nach E eine Linie, welche diese sechsseitige Figur in zwei Theile theilt, so ist jeder dieser Theile ein Parallelogram; denn das Dreieck hat genau dieselbe Lage auf der oberen Seite des Quadrates, die es früher auf der unteren hatte, d. h. jede Seite des Dreieckes liegt ihrer früheren Stellung parallel, und es ist DE gleich AC, EF gleich CB, und folglich sind die beiden Theile, in welche wir die sechsseitige Figur zerlegten, nothwendig Parallelograme. Ueberdieß aber muß, da DF gleich AB ist, DE in der Linie GH, d. h. der oberen Seite

des Quadrates über AC, und EF in der verlängerten Linie KI, d. h. der oberen Seite des Quadrates über BC liegen. Es hat alſo das Parallelogram ADEC gleiche Baſis AC und gleiche Höhe HC mit dem Quadrate über AC, iſt alſo demſelben gleich, und das Parallelogram EFBC hat gleiche Baſis BC und gleiche Höhe KC mit dem Quadrate über BC, iſt alſo wieder dieſem gleich. Da aber die beiden Parallelograme zuſammen die ſechsſeitige Figur oder das Quadrat über der Hypothenuſe AB bilden, ſo haben wir allgemein den Satz:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke iſt die Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich dem Quadrate der Hypothenuſe.

Dieſer höchſt merkwürdige Satz iſt von der größten Anwendung durch das ganze Gebiet der Mathematik, ſoll um das Jahr 500 vor Chriſto von Pythagoras gefunden worden ſeyn, und derſelbe den Göttern aus Dankbarkeit dafür, daß ſie ihn dazu erkoren, den Menſchen dieſe wichtige Wahrheit zu entſchleiern, hundert Ochſen geopfert haben. Da übrigens in der Schule, die Pythagoras gründete, blutige Opfer verboten waren, ſo iſt jene Erzählung ziemlich unwahrſcheinlich, und wohl die Erfindung ſpäterer Zeiten, wo man die hohe Bedeutung jenes Satzes erſt recht erkannt hatte.

Man nennt dieſen Satz die Eſelsbrücke, weil man, ſo einfach er auch hier unſeren Leſern geſchienen haben mag, von wenig talentirten Leuten deſſen

Verständniß nicht erwartete, und der Satz also diesen, wenn sie sich auf das Studium der Geometrie legten, gleichsam ein „bis hierher und nicht weiter“ zurief.

73.

Wenn man eine Linie AB Fig. 58 im Punkte C in zwei Theile AC und CB theilt, und über der ganzen Linie sowohl, als über diese ihre Theile Quadrate errichtet, so muß offenbar, wie eigentlich schon der Augenschein aus der Figur zeigt, die Summe der Quadrate über AC und CB kleiner seyn, als das Quadrat über der ganzen Linie AB; denn wäre die Summe dieser Quadrate gleich dem großen Quadrate, so müßten die Linien AC und BC mit AB ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse AB wäre, bilden können, was aber unmöglich ist, da AC und BC dazu offenbar zu kurz sind.

Wir wollen nun den Unterschied zwischen dieser Summe der beiden kleinen Quadrate und dem großen Quadrate näher bestimmen. Aus Fig. 58 sieht man, daß dieser Unterschied dem Raume FGHEDI gleich ist, denn dieser Raum bleibt von dem großen Quadrate übrig, wenn man die kleinen in dasselbe hineinsetzt. Verlängern wir die Linie FG, bis sie DE schneidet, so entstehen zwei Rechtecke DF und GE, die einander gleich sind; denn GH ist gleich BC, und BC ist wieder gleich DI, da beide Linien die Reste der gleichen Linie AB und AD vorstellen, wenn man

von denſelben die gleichen Stücke AC und AI wegnimmt; ferner iſt EH ebenſo gleich FI, da dieſe Linien die Reſte der gleichen Seiten BE und AB vorſtellen, wenn man von denſelben letzten die gleichen Stücke BH und BC wegnimmt; es haben alſo die beiden Rechtecke DF und GE gleiche Höhe und gleiche Baſis. Ueberdieß aber ſind die dieſelben bildenden Seiten eben die Theile AC und BC, in welche die Linie AB zerfällt wurde. Dieß führt uns zu folgendem im ganzen Gebiete der Mathematik hochwichtigen Satz:

Das Quadrat einer Linie AB übertrifft die Summe der Quadrate über ihren Theilen AC und CB um das doppelte Rechteck über denſelben Theilen.

74.

Wir wiſſen aus dem Vorhergehenden, daß Quadrate und Rechtecke durch Zahlen ausgedrückt werden können, wenn man Zahlen, die ihre Seiten vorſtellen, mit einander multiplicirt. Es kann alſo jede Zahl, in ſoferne ſie nämlich ſtets als das Produkt zweier gleicher oder ungleicher Factoren angeſehen werden kann, auch immer für den Ausdruck des Flächeninhaltes eines Quadrates oder eines Rechteckes gelten. So iſt z. B. die Zahl 12 der Ausdruck eines Rechteckes, deſſen Seiten durch 3 und 4 vorgeſtellt werden, da dieſe letzten Zahlen mit einander multiplicirt 12 geben. Was wir demnach

eben von Quadraten und Rechtecken über gewiſſen Linien ſagten, gilt ebenſo von Quadraten oder zweiten Potenzen gewiſſer Zahlen und ihren Produkten, d. h.

75.

Theilt man eine Zahl in zwei Theile, ſo iſt das Quadrat oder die zweite Potenz der Zahl gleich der Summe der Quadrate der beiden Theile mehr dem doppelten Produkte beider Theile.

Sey z. B. die Zahl 10 in zwei Theile 7 und 3 getheilt, ſo haben wir

Das Quadrat von 10	100
Das Quadrat von . 7	49
» » » . 3	9
das doppelte Produkt 21 von 7 und 3	42
ſomit die Summe dieſer Größen .	100

genau wie oben.

Theilt man ebenſo die Zahl 12 in die Zahlen 8 und 4, oder 7 und 5, oder 9 und 3, ſo findet man ſtets die Summe der Quadrate je zweier ſolcher Theile und ihres doppelten Produktes gleich 144 oder dem Quadrate von 12.

Zehnter Abſchnitt.

Aehnliche Figuren. — Aehnliche Dreiecke. — Verhältniß ihrer Seiten. — Wie man ähnliche Dreiecke ihrer Größe nach vergleicht. — Regelmäßige und unregelmäßige Figuren. — Figuren nach kleinerem und größerem Maaßſtabe.

76.

Einer der wichtigſten Vortheile, den uns die Geometrie bringt, iſt, daß ſie uns in den Stand ſetzt, zwei Gegenſtände mit einander zu vergleichen, die in jeder Rückſicht, ihre Größe ausgenommen, einander ähnlich geſtaltet ſind. Solche Gegenſtände werden, um mit einem ſchon aus dem gemeinen Leben bekannten Ausdrucke zu ſprechen, nach verſchiedenen Maaßſtäben gebildet ſeyn. So iſt z. B. die Figur eines Landes auf der Landkarte der Geſtalt des Landes ſelbſt vollkommen ähnlich, und im Grunde nur eine Darſtellung deſſelben in verjüngtem Maaßſtabe. Dieſer Ausdruck aber will offenbar nur ſagen, daß jede Entfernung und überhaupt jede Ausdehnung des Landes in der Karte gleichmäßig verkleinert erſcheint.

Betrachten wir nun ein Dreieck ABC Fig. 59, theilen wir ſeine Seite AB in zwei gleiche Theile Aa und Ba, und ziehen wir durch den Punkt a eine Linie ac parallel zu AC. Das ſo entſtehende kleine Dreieck Bac hat offenbar gleiche Winkel mit dem großen

Dreiecke ABC; denn der Winkel bei B iſt beiden Figuren gemeinſchaftlich, und die Winkel bei a und A, ſo wie die bei c und C ſind als Gegenwinkel (33) einander gleich. Wenn wir überdieß uns überzeugten, daß die Seiten des kleinen Dreieckes durchaus in gleichem Maaße kleiner ſind, als die gleichliegenden Seiten des großen, ſo müßten wir von den beiden Figuren ſagen, daß ſie einander vollkommen ähnlich und lediglich in ihrem Maaßſtabe verſchieden ſind. Die Seite Ba des kleinen Dreieckes iſt vermöge unſerer Zeichnung die Hälfte der Seite AB des großen, und durch unmittelbare Meſſung zeigt ſich in der That, daß auch ac die Hälfte von AC und Bc die Hälfte von BC iſt.

Hätten wir die Seite AB ſtatt wie hier in zwei, in drei oder vier gleiche Theile getheilt, und durch den bei B zunächſt liegenden Theilungspunkt eine Linie parallel zu AC gezogen, ſo würden wir ebenſo finden, daß die Seiten des ſo entſtehenden kleinen Dreieckes durchaus den dritten oder vierten Theil der gleichliegenden Seiten des großen betragen. Unter gleichliegenden Seiten aber verſteht man die gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten.

Wenn alſo die Winkel zweier Dreiecke einander ſtückweiſe gleich ſind, ſo ſind die Dreiecke einander ähnlich, d. h. je zwei gleichliegende Seiten derſelben haben zu einander ſtets daſſelbe Verhältniß.

77.

Man würde aber ſehr irren, wenn man daraus ſchließen wollte, daß der Flächeninhalt zweier ähnlicher Dreiecke in dem Verhältniſſe ihrer Seiten ſteht, alſo z. B. den Raum, welchen das eine Dreieck einſchließt, zweimal ſo groß, als den Raum, welchen das zweite Dreieck umfaßt, annehmen wollte, wenn die Seiten des erſten zweimal ſo groß, als die gleichliegenden des zweiten Dreieckes ſind.

Verzeichnen wir, um dieß näher zu erörtern, ein Dreieck ABC Fig. 60, und verlängern wir deſſen Seiten AB und BC, bis jede derſelben noch einmal ſo lang wird, ſo erhalten wir ein dem erſten ähnliches Dreieck BDE mit durchaus zweimal längeren Seiten. Hier lehrt nun ſchon der Augenſchein, daß der Flächenraum des Dreieckes BDE viel mehr als zweimal ſo groß, als der des Dreieckes ABC iſt, da offenbar der zugewachſene Raum ACDE viel größer iſt, als das urſprüngliche Dreieck ABC. Wir wollen aber den Unterſchied der Flächenräume der beiden Dreiecke genauer unterſuchen, und zu dieſem Behufe die Seite DE in F halbiren, und die Linien AF und FC ziehen. Das Dreieck BDE zerfällt auf dieſe Art in vier congruente Dreiecke, deren jedes dem urſprünglichen Dreiecke ABC gleich iſt, wovon man ſich leicht durch einen geometriſchen Beweis, am ſchnellſten aber durch Deckung überzeugen kann, indem man nämlich die Fig. 60 in Papier ausſchneidet, und die Dreiecke über einander legt.

Daraus folgt aber, daß der Flächenraum des großen Dreieckes BDE, deſſen Seiten zweimal ſo groß ſind, als die gleichliegenden des urſprünglichen ABC, viermal ſo groß iſt, als der Flächenraum dieſes urſprünglichen Dreieckes.

Verlängert man ebenſo die Seiten AB und BC noch über D und E hinaus Fig. 61, bis ſie dreimal ſo lang werden, als AB und BC, theilt man die Baſis GH des neuen Dreieckes BGH in drei gleiche Theile GI, IK und KH, und zieht man endlich die Linien DI, FI, FK und EK, ſo zerfällt das Dreieck BGH in neun Dreiecke, die durchaus congruent und deren jedes dem urſprünglichen Dreiecke ABC gleich iſt; es hat alſo das neue Dreieck BGH, deſſen Seiten durchgängig dreimal größer ſind, als die gleichliegenden Seiten des ähnlichen Dreieckes ABC, einen neunmal größeren Flächeninhalt, als das Dreieck ABC.

Setzen wir dieß Verfahren fort, und verlängern wir die Seiten AB und BC des urſprünglichen Dreieckes, bis ſie viermal länger werden, ſo erhalten wir eine neue Reihe von ſieben gleichen Dreiecken, die, zu den eben gefundenen neun hinzugegeben, ſechszehn Dreiecke ausmachen, die unter einander alle congruent und deren jedes dem Dreiecke ABC gleich.

Faſſen wir nun das Vorhergehende zuſammen, ſo ſehen wir, daß, wenn die Seiten eines Dreieckes zweimal, dreimal, viermal größer ſind, als die

gleichliegenden eines ähnlichen Dreieckes, der Flächeninhalt des erſten das vierfache, neunfache, ſechszehnfache des Flächeninhaltes des zweiten Dreieckes beträgt.

Die Zahlen 4, 9, 16 .... aber ſind die zweiten Potenzen oder Quadrate der Zahlen 2, 3, 4 ....

Es verhalten ſich alſo die Flächenräume ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate ihrer Seiten.

In der That haben wir ja auch oben (71) daſſelbe von Quadraten nachgewieſen; auch bei dieſen Figuren wird der Flächenraum viermal, neunmal, ſechszehnmal ... größer, wenn eine Seite derſelben zweimal, dreimal, viermal ... größer wird, alſo nehmen wirklich, und das ſagt gerade unſer eben aufgeſtellter Satz, die Flächenräume ähnlicher Dreiecke in demſelben Maaße zu, in welchem die Flächenräume der über ihren Seiten conſtruirten Quadrate wachſen.

Daſſelbe gilt aber, wie wir gleich ſehen werden, nicht bloß von Dreiecken und Quadraten, ſondern überhaupt von allen durch gerade Linien gebildeten Figuren.

78.

Man nennt in der Geometrie eine Figur regelmäßig, wenn ſie durchaus gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. So iſt z. B. ein Quadrat oder ein gleichſeitiges Dreieck eine regelmäßige Figur.

79.

Es ist demnach die sechsseitige Figur ABCDEF Fig. 62 offenbar eine unregelmäßige. Bilden wir nun eine andere sechsseitige Figur, die der ersten vollkommen ähnlich, aber nach einem zur Hälfte kleinern Maaßstabe entworfen ist, d. h. gleiche Winkel mit der ersten, und durchaus halb so große Seiten wie die erste Figur hat. Zu diesem Behufe wollen wir die erste Figur in Dreiecke zerfällen, indem wir vom Punkte A nach den Ecken C, D, E Linien ziehen; theilen wir hierauf die Seite AB in zwei gleiche Theile Ab und Bb, und ziehen wir eine Linie bc parallel zu BC, dann von c eine Linie cd parallel zu CD, ebenso von d eine Linie de parallel zu DE, und endlich von e eine Linie ef parallel zu EF.

Die so entstandene zweite sechsseitige Figur Abcdef hat gewiß durchaus nur halb so große Seiten, als die erste sechsseitige Figur ABCDEF, denn wir haben in jedes der Dreiecke, die zusammen diese erste Figur bilden, ein anderes ähnliches Dreieck verzeichnet, dessen Seiten genau halb so groß sind (76), als die gleichliegenden des zugehörigen größeren Dreieckes. Es sind folglich auch die Linien bc, cd, de, ef durchaus die Hälften der entsprechenden Linien BC, CD, DE, EF.

Ueberdieß aber sind die Winkel der neuen Figur den Winkeln der ersten durchaus gleich;

Winkel b iſt dem Winkel bei B gleich, weil bc und BC parallel ſind; der Winkel bei c wird von zwei Winkeln gebildet, die den beiden Winkeln, aus denen der Winkel bei C beſteht, gleich ſind; es iſt alſo auch der Winkel bei c dem Winkel bei C gleich u. ſ. w.

Die neue ſechsſeitige Figur iſt alſo der alten vollkommen ähnlich, nur in zweimal kleinerem Maaßſtabe ausgeführt.

80.

Wie verhalten ſich nun die Flächenräume dieſer beiden ähnlichen ſechsſeitigen Figuren zu einander?

Das Dreieck ABC hat viermal größeren Flächeninhalt, als das Dreieck Abc (77); ebenſo iſt der Flächenraum des Dreieckes ACD viermal größer, als der des Dreieckes Acd, und daſſelbe gilt von den übrigen Dreiecken. Es iſt alſo auch der Flächeninhalt der ſechsſeitigen Figur ABCDEF viermal größer, als der der ähnlichen, in halbem Maaßſtabe ausgeführten Figur Abcdef.

Da aber offenbar der Flächeninhalt der kleineren Figur ebenſo neunmal, ſechszehnmal u. ſ. w. kleiner ausgefallen wäre, wenn man ſie auf einen dreimal, viermal u. ſ. w. kleineren Maaßſtab ausgeführt hätte, als die größere, ſo ſieht man, daß, was wir oben (77) von Dreiecken und Quadraten ſagten, von allen Figuren, die durch gerade Linien gebildet werden, gilt, und man überhaupt folgenden Satz hat:

81.

Die Flächenräume ähnlicher Figuren verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Seiten.

Dieſer Satz iſt von der größten Wichtigkeit, da er ſehr häufige Anwendung findet, und zugleich iſt aus dem hier befolgten Beweisgange dem Leſer wieder erſichtlich geworden, wie angemeſſen es iſt, ſich mit den Eigenſchaften des Dreieckes bekannt zu machen, bevor man an die Unterſuchung anderer Figuren geht, da ſich dieſe gleichſam von ſelbſt ergibt, wenn man jene als bekannt vorausſetzen darf; und dieß iſt der Grund, warum in den Elementen Euclid's das Dreieck eine ſo große Rolle ſpielt.

82.

Da ſich nun ähnliche Figuren überhaupt in Bezug auf ihre Seiten und Flächenräume ganz ebenſo verhalten, wie Quadrate, ſo wird, was wir oben (72) von den Quadraten über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes ſagten, von ähnlichen Figuren überhaupt gelten, die über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes verzeichnet werden, d. h. wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes unter einander ähnliche Figuren conſtruirt, ſo werden die Flächenräume der Figuren über den Katheten zuſammen immer gleich ſeyn dem Flächenraume der Figur über der Hypothenuſe. Verzeichnet man alſo z. B. über die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes **gleichſeitige**, alſo unter einander ähn-

liche Dreiecke, ſo haben die Dreiecke über den Katheten zuſammen denſelben Flächeninhalt mit dem Dreiecke über der Hypothenuſe.

Eilfter Abſchnitt.

Anwendungen der Eigenſchaften ähnlicher Figuren. — Die Höhe eines Kirchthurmes aus der Ferne zu meſſen. — Die Höhe eines Berges, ohne ihn zu erſteigen. — Die Diſtanz des Mondes von der Erde zu beſtimmen. — Eingetheilte Maaßſtäbe. — Beſtimmung kleiner Bruchtheile eines Zolles. — Eigenſchaften von vier Proportionalen. — Methode, Proportionalen zu finden.

83.

Es gibt vielleicht im ganzen Gebiete der Mathematik keine nützlichere Lehre, als die eben hier abgehandelte von der Aehnlichkeit der Dreiecke, und wir können unſeren Leſern nur einen ſchwachen Begriff ihrer hohen Wichtigkeit durch einige Beiſpiele geben, die wir hier aus ihren wahrhaft unzähligen Anwendungen anführen wollen.

Geſetzt, wir wollten die Höhe eines Thurmes AB (Fig. 63) kennen lernen, den man nicht unmittelbar meſſen kann oder will, wie denn dieß auch ſehr ſchwierig und umſtändlich wäre. Zu dieſem Zwecke errichte man in einiger Entfernung vom Thurme

einen ſenkrechten Stab DE, auf welchem ein Fernrohr, oder auch nur ein geſpannter Faden, längs deſſen man hinſehen kann, angebracht iſt, richte dann dieß Fernrohr oder dieſen Faden genau auf die Spitze des Thurmes, und denke ſich die Linie EB, in welcher der Faden liegt, bis nach C verlängert, ſo entſtehen zwei Dreiecke CDE und ABC, die einander ähnlich ſind, da ED ſowohl als AB ſenkrecht ſtehen, und folglich dieſe Seiten der beiden Dreiecke parallel laufen. Es hat demnach CD zu DE daſſelbe Verhältniß, wie CA zu AB. Da man aber CD und DE leicht meſſen kann, ſo wird man auch leicht das Verhältniß der Linien CA und AB beſtimmen. Geſetzt, wir hätten gefunden, DE betrage zwei Drittheile von CD, ſo muß auch AB zwei Drittheile von AC betragen. Iſt alſo z. B. CA gleich 300 Fuß, ſo iſt der Thurm 200 Fuß hoch.

Um alſo die Höhe des Thurmes AB zu finden, braucht man bloß CA zu meſſen.

84.

Im Allgemeinen ebenſo wird man verfahren, wenn es ſich um die Meſſung der Höhe eines Berges handelt, nur wird man hier die Methode in etwas abändern müſſen, da der Fußpunkt einer Senkrechten vom Scheitel des Berges nicht zugänglich, und folglich die Diſtanz CA (Fig. 63) nicht unmittelbar meßbar iſt.

Sey (Fig. 64) A der Gipfel des Berges, ſo wird man in zwei Orten C und D die gleich langen ſenkrechten Stäbe CF und DE aufſtellen, und über auf ihren oberen Enden angebrachte Fäden nach dem Punkt A hin viſiren. Denkt man ſich dann die Linien der Fäden nach beiden Seiten verlängert, bis ſie einerſeits bei G und H in den Boden, und andererſeits auf den Gipfel A des Berges reichen, ſo entſteht ein ſchiefwinkliges GAH deſſen Höhe AM die geſuchte Höhe des Berges iſt.

Um dieſe nun zu finden, meſſen wir die Linie GH, und verzeichnen (Fig. 65) eine Linie KL, die z. B. eben ſo viel Zolle enthält, als GH Klafter hat; in K bilden wir einen Winkel NKL, der gleich iſt dem Winkel HGA, und ebenſo in L einen Winkel NLK gleich dem Winkel AHG; endlich verlängern wir KL und fällen von N eine ſenkrechte Linie NO auf KO, ſo daß jetzt ein ſchiefwinkliges Dreieck NLK, deſſen Höhe NO iſt, entſtanden ſeyn wird.

Wir wiſſen aber aus dem Vorhergehenden, daß wenn zwei Dreiecke zwei ihrer Winkel einander gleich haben, es auch die dritten Winkel ſeyn müſſen (48). Die Dreiecke AGH und NKL haben ſomit gleiche Winkel, ſind alſo einander ähnlich, und demnach wird GH ſich zu AH ſtets ebenſo verhalten, wie KL zu NL. Da wir aber der Linie KL ſo viele Zolle gaben, als GH Klafter enthält, ſo muß offenbar NL auch ſo viele Zolle enthalten, als AH

indeß, wie geſagt, war uns hier nur darum zu thun, unſeren Leſern einen allgemeinen Begriff von der Löſung dieſes Problemes zu geben, und wir hoffen, daß ſie nun wenigſtens nicht mehr unter diejenigen gehören werden, die da meinen, die Aſtronomen führten nur ſich ſelbſt und Andere in die Irre, wenn ſie von Entfernungen der Geſtirne ſprechen, die ſie beſtimmt haben.

86.

Nun wir aber einmal die Entfernung des Mondes kennen, wollen wir noch einen Schritt weiter thun, und die viel größere Entfernung der Sonne beſtimmen.

Zur Zeit einer der beiden Phaſen des Mondes, die man erſtes und letztes Viertel nennt, ſtehen bekanntlich Sonne, Mond und Erde in einem rechtwinkligen Dreiecke, deſſen rechter Winkel im Monde liegt. Es ſtelle uns nun Fig. 68 eine ſolche Stellung der drei Geſtirne vor; S ſey die Sonne, E die Erde, und M der Mond. Richtet man von E aus ein Fernrohr nach M und ein anderes nach S, ſo wird man nur den Winkel, welchen dieſe beiden Fernröhre mit einander bilden, meſſen dürfen, um ſofort den Winkel MES unſeres Dreieckes zu haben.

Die Entfernung des Mondes von der Erde, wie wir aus unſerer früheren Betrachtung hätten ableiten können, beträgt beiläufig 50000 deutſche Meilen. Ziehen wir jetzt eine Linie em (Fig. 69), die z. B. 50 Linien lang iſt, ſo daß eine Linie

tauſend Meilen vorſtellt, und ſetzen wir an dieſelbe die Linie mS unter einem rechten, die Linie eS hingegen unter einem dem Winkel MES in Fig. 68 gleichen Winkel an, ſo haben wir ein dem Dreiecke MES ähnliches Dreieck meS, deſſen Seite eS ebenſo viele Linien enthalten muß, als ES Tauſende von Meilen hat. Allein wollte man dieß wirklich ſo, wie wir hier ſagten, ausführen, ſo würde man bald ſehen, daß kein Papier hinreicht, um die Figur 69 darauf zu verzeichnen. Es iſt nämlich die Sonne in der That nahe 20 Millionen Meilen von der Erde entfernt, die Seite eS in Fig. 69 müßte alſo 20000 Linien oder über 23 Klafter lang werden. Unſer Maaßſtab für die Figur 69 iſt alſo viel zu groß, und wir müßten z. B. mit einer Linie eine Million Meilen vorſtellen, die Linie em alſo nur dem zwanzigſten Theile einer Linie gleich machen, um dann eS in einer Länge von zwanzig Linien zu erhalten, die ſomit für die geſuchte Entfernung der Sonne von der Erde 20 Millionen Meilen geben würde.

87.

Die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke kann uns aber auch noch für einen andern Zweck dienen, den wir in unſeren Betrachtungen ſchon öfters berührten, nämlich für die Eintheilung einer geraden Linie in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile.

So lange dieſe Theile Zolle, Linien u. dgl. ſind, wird man die Eintheilung mittelſt eines Maaßſtabes

bewerkſtelligen. Wenn es ſich aber darum handelt eine Linie von beliebiger Länge in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile überhaupt zu theilen, ohne auf die Größe dieſer Theile in Vergleich mit einem beſtimmten Maaße Rückſicht zu nehmen, ſo werden andere Methoden hierzu erfordert werden.

Geſetzt, wir wollten die Linie AB in vier gleiche Theile theilen (Fig. 70). Ziehen wir zu dieſem Behufe unter einem beliebigen Winkel mit AB eine Linie BH von beliebiger Länge, und tragen wir auf dieſer Linie vier wieder beliebig lange aber unter einander gleiche Stücke BC, CD, DE, EF auf, verbinden wir A mit F und ziehen dann die Linien EI, DH, CG parallel zu AF, ſo entſtehen vier ähnliche Dreiecke, deren Seiten alſo durchaus gleiches Verhältniß zu einander haben. Da aber BC der vierte Theil von BF iſt, ſo muß auch BG der vierte Theil von AB ſeyn; ebenſo muß, da BD die Hälfte von BF iſt, auch BH die Hälfte von AB, alſo auch HG der vierte Theil von AB ſeyn; ebenſo wird BI gleich drei Viertheilen von AB und folglich auch HI ein Viertheil von AB ſeyn. Mithin iſt AB auf dieſe Art in vier gleiche Theile AI, IH, HG, und GB getheilt worden.

Ebenſo wird man die Linie AB in zehn, zwanzig u. ſ. w. gleiche Theile theilen; nur muß man dann die Linie BH gehörig verlängern; wenn man alſo eine kurze Linie in viele Theile theilen will, ſo wird man der Linie BF eine außerordentliche Länge geben müſſen.

88.

In ſolchen Fällen bedarf man nun einer andern Methode, die ſich hier bequemer geſtaltet. Geſetzt, wir wollten die Linie BC (Fig. 71) in zehn gleiche Theile theilen, ſo errichten wir darauf ſenkrecht eine beliebig lange Linie BA, und tragen auf derſelben zehn beliebig lange gleiche Stücke B9, 98, 87 u. ſ. w. auf, verbinden den Endpunkt A des letzten dieſer Stücke mit C, und ziehen dann in den Theilungspunkten 1, 2, 3, 4 ... parallele Linien zu BC; es entſtehen auf dieſe Art eine Menge ähnlicher Dreiecke, deren Seiten alſo zu einander daſſelbe Verhältniß haben; da aber z. B. in dem oberſten kleinen Dreiecke die Seite A1 das Zehntheil der Seite AB im Dreieck ABC beträgt, ſo iſt auch die Seite 11' das Zehntheil der Seite BC; ebenſo enthält A2 zwei Zehntheile der Seite AB, folglich auch 22' zwei Zehntheile der Linie BC u. ſ. w. Man hat alſo auf dieſe Art beſtimmt, wie lang ein, zwei, drei u. ſ. w. Zehntheile der Linie BC ſind, und folglich die gewünſchte Theilung vollbracht.

89.

Wir wollen nun, nachdem wir mit den vorhergehenden Beiſpielen unſern Leſern die Nützlichkeit der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke wenigſtens einigermaßen nachgewieſen haben, zur Fortſetzung unſerer geometriſchen Betrachtungen übergehen.

Man nennt vier Linien A, B, C, D Fig. 72 *vier Proportionirte*, wenn die erſten beiden ſich zu einander ebenſo verhalten, wie die letzten beiden, ſo daß, wenn z. B. A zwei Drittheile von B mißt, auch C zwei Drittheile von D enthält, und alſo ſtets dieſelbe Zahl das Verhältniß je zweier derſelben ausdrückt.

90.

Solche Linien haben unter anderen die merkwürdige Eigenſchaft, daß *ein Rechteck über der erſten und letzten einem Rechteck über der zweiten und dritten gleich iſt.*

Bilden wir z. B. aus unſeren vier Proportionirten A, B, C, D in Fig. 72 hiernach Rechtecke Fig. 73, in deren einem A die Baſis, D die Höhe, und in deren anderem B die Baſis und C die Höhe gebe. Da nun die vier Linien proportionirt ſind, ſo iſt A genau im ſelben Maaße größer, als B, in welchem C größer iſt als D. Was alſo das eine Rechteck an Breite voraus hat, erſetzt das andere genau an Höhe, und was das erſte an Höhe weniger hat, verliert auch genau das zweite an Breite. Die Rechtecke ſind folglich einander völlig gleich.

91.

Die Leſer werden ſich aus der Arithmetik erinnern, daß in einer Proportion z. B.

$$2 : 4 = 6 : 12$$

das Produkt der äußeren Glieder 2 und 12 ſtets dem Produkte der inneren 4 und 6 gleich, nämlich

immer 24 iſt. Dieß iſt aber im Grunde nur unſer eben betrachtete geometriſche Satz; die Zahlen 2, 4, 6, 12 können nämlich eben ſo gut Linien, als irgend andere Größen vorſtellen, und da unter ihnen obige Proportion Statt findet, alſo die erſte zur zweiten ſich genau verhält, wie die dritte zur vierten, ſo ſind die durch dieſe Zahlen vorgeſtellten Linien vier Proportionirte, folglich das Rechteck der erſten und letzten, oder, was daſſelbe iſt, ihr Produkt dem Rechtecke über der zweiten und dritten oder ihrem Produkte gleich. Dieß bildet den Grund der ſogenannten Regel de Tri, bei welcher gewöhnlich die drei erſten Proportionirten gegeben ſind, und die vierte dadurch gefunden wird, daß man die zweite mit der dritten multiplicirt, und dieß Produkt durch die erſte dividirt. Dieß iſt bei Zahlen nun von ſelbſt klar, aber wie ſoll man bei Linien verfahren, wenn drei Proportionirte gegeben ſind, und man die vierte zu ſuchen hat?

92.

Seyen (Fig. 74) A, B, C die drei gegebenen Linien, zu denen eine vierte Proportionirte zu finden iſt. Man bilde mit A und B ein beliebiges Dreieck Fig. 75, und verzeichne hierauf ein anderes Dreieck Fig. 76 ſo, daß deſſen Winkel den Winkeln des erſten Dreiecks gleich, und eine ſeiner Seiten von der Linie C gebildet werde, wobei C ſo zu ſtellen iſt, daß der dieſer Seite gegenüber liegende Winkel

dem der Seite A in Fig. 75 gegenüber liegenden Winkel gleich wird. Hier iſt nun offenbar die Seite D in Fig. 76, welche demjenigen Winkel gegenüber liegt, der dem der Seite B in Fig. 75 gegenüber liegenden Winkel gleich iſt, die geſuchte vierte Proportionirte. Denn die beiden Dreiecke Fig. 75 und Fig. 76 ſind wegen der Gleichheit ihrer Winkel ähnlich, folglich ihre gleichliegenden Seiten in gleichem Verhältniſſe, alſo verhält ſich A zu B in Fig. 75 gerade ſo, wie C zu D in Fig. 76, und ſomit ſind dieſe Linien vier Proportionirte.

Zwölfter Abſchnitt.

Kreiſe. — Mittelpunkt. — Umfang. — Halbmeſſer. — Grade. — Quadranten. — Verſchiedene Eintheilungen des Kreiſes. — Grade in Minuten und Sekunden getheilt. — Quadratur des Kreiſes. — Unmöglichkeit eines genauen numeriſchen Ausdruckes des Verhältniſſes zwiſchen Durchmeſſer und Umfang. — Umfang der Erde. — Näherungsweiſe Beſtimmung des Umfanges eines Kreiſes. — Wie findet man den Flächeninhalt eines Kreiſes, wenn ſein Halbmeſſer gegeben iſt?

93.

Bekanntlich nennt man einen **Kreis** diejenige krumme Linie, welche mittelſt eines Zirkels beſchrieben wird, indem man einen ſeiner Füße in einem und demſelben Punkte feſt hält, und den andern Fuß

um dieſen herumdreht. Die Linie ſelbſt heißt der Umfang oder die Peripherie des Kreiſes, und der Punkt, in welchem der eine Fuß des Zirkels feſt ſtand, der Mittelpunkt des Kreiſes; die letzte Benennung iſt ſehr angemeſſen, da offenbar alle Punkte des Umfanges von dieſem Mittelpunkte gleich weit abſtehen. Dieſer beſtändige Abſtand der Peripherie vom Mittelpunkte, oder die Entfernung der beiden Fußſpitzen des Zirkels heißt der Halbmeſſer oder Radius des Kreiſes, das letzte von einem lateiniſchen Worte, das Strahl bedeutet, weil mehrere vom Mittelpunkte aus gezogene Halbmeſſer eine ſtrahlenförmige Anordnung zeigen.

Iſt alſo Fig. 77 ein Kreis, ſo iſt ADBE ſeine Peripherie, C ſein Mittelpunkt, und jede der gleichen Linien CB, CD ... ein Halbmeſſer deſſelben.

94.

Wir haben hier um den Mittelpunkt eine Menge gleicher Winkel, und die Theile der Peripherie, welche denſelben entſprechen, ſind offenbar auch gleich. Man wird daher dieſe Kreisbogen ſehr gut zur Meſſung der Winkel am Mittelpunkte benützen können, indem dieſe Bogen genau in demſelben Maaße zunehmen, in welchem die Winkel größer werden.

95.

In der That iſt auch dieſe Methode, die Winkel durch die Bogen, welche ſie von der Peripherie umfaſſen, zu meſſen, die gebräuchlichſte, und, wie wir bald ſehen werden, ungemein vortheilhaft.

Man theilt gewöhnlich die ganze Peripherie eines Kreiſes in 360 gleiche Theile, und nennt einen ſolchen Theil einen Grad. Denkt man ſich nun um den Mittelpunkt herum 360 Halbmeſſer zu jenen Theilungspunkten der Peripherie gezogen, ſo hat man 360 gleiche Winkel um den Mittelpunkt, und jeder dieſer Winkel heißt ebenfalls ein Grad.

96.

Da nach 12 die ſämmtlichen Winkel um einen Punkt herum vier Rechte ausmachen, ſo muß ein rechter Winkel dem vierten Theile von 360 Graden gleich kommen oder 90 Grade umfaſſen.

97.

Man nennt Durchmeſſer oder Diameter eine durch den Mittelpunkt des Kreiſes gehende und auf beiden Seiten bis zur Peripherie reichende Gerade. Es iſt alſo ein Diameter die Summe zweier genau in entgegengeſetzter Richtung vom Mittelpunkt ausgehender Halbmeſſer.

Wir haben in Fig. 78 zwei auf einander ſenkrechte Durchmeſſer eines Kreiſes verzeichnet. Da die Winkel am Centrum unter einander gleich ſind, nämlich jeder derſelben ein Rechter iſt, ſo muß dadurch auch die Peripherie in vier gleiche Theile, deren jeder 90 Grade umfaßt, getheilt worden ſeyn. Einen ſolchen dem vierten Theile der Peripherie gleichkommenden Bogen nennt man einen Quadranten.

98.

Wir fanden oben (49), daß jeder Winkel eines gleichſeitigen Dreieckes $^2/_3$ eines Rechten gleich ſey; ein ſolcher Winkel hat demnach 60 Grade.

99.

Da ein rechtwinkliges Dreieck mit gleichen Katheten die ſpitzen Winkel gleich haben (23) und beide ſpitze Winkel zuſammen einen Rechten bilden müſſen, ſo iſt in einem ſolchen Dreiecke jeder ſpitze Winkel gleich einem halben Rechten, d. h. jeder hat 45 Grade.

100.

Die Eintheilung der Peripherie in 360 Grade iſt eigentlich willkührlich; in der That iſt z. B. in Frankreich eine andere Eintheilung, nämlich in 1000 Theile gebräuchlich. Man nennt dieſe beide Eintheilungen deßwegen, jene die Sexageſimal- und dieſe die Decimal-Theilung. Die letzte hat die großen Vortheile, welche bei unſerem decadiſchen Zahlenſyſteme Produkte von 10 in der Rechnung bieten, die andere hingegen ein ungemein hohes Alter für ſich (man ſchreibt ihre Einführung den Aegyptern zu) und den Vortheil der Theilbarkeit der Zahl 360 durch ſehr viele Zahlen. Man kann nämlich die Zahl 360 durch alle folgenden Zahlen theilen, ohne daß ein Reſt bleibt:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40 48, 60, 72, 90, 120, 180.

Daraus entsteht nun der für den Gebrauch sehr bequeme Umstand, daß eine große Anzahl Winkel in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann.

101.

Da ein Grad der neunzigste Theil eines Quadranten, ein Quadrant aber offenbar für Kreise von verschiedenen Halbmessern von ungleicher Länge ist, so wird auch ein Bogen von einem Grade sehr ungleiche Längen haben können.

Kreise sind stets unter einander ähnliche Figuren, die sich in jeder Beziehung gleichmäßig zu einander verhalten; wenn also Fig. 79 zwei Kreise so gestaltet sind, daß der Halbmesser des einen doppelt so groß als der des anderen ist, so wird auch die Peripherie des einen doppelt so lang, als die des anderen seyn, somit auch ein Quadrant oder ein Grad des einen doppelt so groß, als ein Quadrant oder ein Grad des anderen.

102.

Dieß gilt aber nur von den Bogen, und keineswegs von den Winkeln. Da rechte Winkel unter einander stets gleich sind, so müssen auch Winkel, die den neunzigsten Theil eines Rechten oder einen Grad umfassen, einander stets gleich seyn, wenn auch die Bogen, die sie in verschieden großen Kreisen umfassen, ungleich lang sind.

103.

Um die Größe auch solcher Winkel angeben zu können, die kleiner als ein Grad sind, theilt man den Grad in 60 gleiche Theile, die man Minuten, und die Minute wieder in 60 gleiche Theile, die man Sekunden nennt, ganz auf ähnliche Art, wie man die Stunden einzutheilen gewohnt ist.

Grade bezeichnet man durch das neben die Zahl oberhalb gesetzte Zeichen °, Minuten durch ′ und Sekunden durch ″. So kann man nun einen Winkel von z. B. 45 Graden, 53 Minuten, 17 Sekunden sehr kurz ausdrücken, indem man schreibt: 45° 53′ 17″.

104.

Da die Peripherie zum Durchmesser stets dasselbe Verhältniß hat (101), so darf man dieses nur in irgend einem Kreise bestimmen, um sofort in jedem Kreise aus der Größe des Durchmessers auf die Länge des Umfanges schließen zu können.

105.

Diese Aufgabe beschäftigte viele Jahrhunderte hindurch die ausgezeichnetsten Geometer, und von ihr hängt das berühmte Problem der Quadratur des Zirkels ab. Unter dieser letzten aber versteht man eine allgemeine Methode, aus der Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. des Durchmessers eines Kreises auf die Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w. zu schließen, welche der vom Kreise eingeschlossene Raum enthält.

106.

Jenes Verhältniß der Peripherie zum Durchmeſſer ſuchte man nun lange Zeit durch zwei Zahlen genau auszudrücken, aber immer umſonſt; endlich überzeugte man ſich, daß dieß unmöglich, und man jenes Verhältniß nur näherungsweiſe angeben könne, ein Fall, der in der Mathematik ungemein häufig vorkommt, wie man denn z. B. auch das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu ſeiner Diagonale, ſo wie das der Seite eines gleichſeitigen Dreieckes zu ſeiner Höhe nicht völlig genau ausdrücken kann.

107.

Wenn gleich aber dieß Verhältniß der Peripherie zum Durchmeſſer ſich nicht vollkommen genau durch zwei Zahlen angeben läßt, ſo kann man ſich doch der Wahrheit ſo weit nähern, als man nur immer will, indem man immer andere und andere Zahlen wählt. So verhalten ſich z. B. die Zahlen 1 und 3 beiläufig wie der Durchmeſſer eines Kreiſes zum Umfange deſſelben, ſo daß alſo der Umfang ſtets beiläufig dreimal ſo groß iſt, als der Durchmeſſer; allein dieſe Zahlen drücken das geſuchte Verhältniß noch ſehr ungenau aus, und man erhält dadurch in der That den Umfang um nahe anderthalb Zehntheile des Durchmeſſers zu klein, ſo daß, wenn z. B. der Durchmeſſer einen Fuß beträgt, der Umfang nicht, wie aus jenen Zahlen folgen würde, drei Fuße, ſondern nahe drei Fuße und anderthalb

Zehntheile eines Fußes oder nahe drei Fuße einen Zoll und acht Linien lang iſt.

108.

Viel näher geben dieß Verhältniß ſchon die Zahlen 7 und 22 an; man erhält dabei den Umfang nur mehr um beiläufig ein Tauſendtheil des Durchmeſſers zu groß; wenn der Durchmeſſer alſo wieder einen Fuß lang wäre, ſo erhielte man mit Anwendung dieſer Zahlen den Umfang um beiläufig ein Tauſendtheil eines Fußes oder etwa um ein Fünftheil einer Linie zu groß. Noch genauer drücken jenes Verhältniß die Zahlen 106 und 333 aus; man erhält mit ihnen die Peripherie nur mehr um beiläufig acht Hunderttheile des Durchmeſſers zu klein, alſo in unſerem Beiſpiele um etwa $^1/_{84}$ Linie zu kurz, und ſofort mit den Zahlen 113 und 355, 33102 und 103993 ꝛc., die das geſuchte Verhältniß immer wieder um etwas genauer angeben.

109.

Bleiben wir bei den Zahlen 7 und 22 ſtehen, die das Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie ſchon, wie wir geſehen haben, nahe angeben, und ſuchen wir durch einige Beiſpiele ihren Gebrauch zu erläutern. Es ſollen dieſe beiden Zahlen offenbar ſo viel bedeuten, als daß der Durchmeſſer ſtets nahe $^7/_{22}$ des Umfanges, oder umgekehrt der Umfang $^{22}/_7$ des Durchmeſſers betrage. Man wird alſo, um aus

dem Durchmeſſer den Umfang zu finden, die Anzahl Zolle, Fuße u. ſ. w. des Durchmeſſers erſtens durch 7 dividiren, und zweitens den ſo erhaltenen Quotienten mit 22 multipliciren; die ſo reſultirende Zahl wird die Anzahl Zolle, Fuße u. ſ. w. angeben, welche der Umfang hat. Umgekehrt aber, wenn man aus der Peripherie den Durchmeſſer finden will, wird man die Anzahl Zolle, Fuße u. ſ. w. der Peripherie mit 7 multipliciren, und durch 22 dividiren; die ſo erhaltene Zahl wird die Anzahl Zolle, Fuße u. ſ. w. geben, welche der Durchmeſſer enthält *).

Der Umfang unſerer Erde beträgt 5399 d. Meilen; dieſe Zahl mit 7 multiplicirt gibt 37793, und dieſe Zahl durch 22 dividirt gibt nahe 1718; folglich hat der Durchmeſſer der Erde nahe 1718 deutſche Meilen.

Der Durchmeſſer des Mondes beträgt 466 d. Meilen; dieſe Zahl durch 7 dividirt gibt nahe 67, und dieſe Zahl mit 22 multiplicirt gibt 1474; folglich hat des Mondes Umfang 1474 deutſche Meilen.

---

*) Wer mit Decimalen rechnen kann, wird viel ſchneller zum Ziele gelangen, wenn er mit dem Quotienten 3.14159 des Verhältniſſes des Durchmeſſers zur Peripherie entweder jenen multiplicirt, wenn er dieſe, oder dieſe dividirt, wenn er jenen ſucht.

110.

Nachdem wir so gelernt haben, die Peripherie des Kreises aus dem Halbmesser und umgekehrt zu bestimmen, wollen wir nun den **Flächeninhalt mittelst des Halbmessers oder des Umfanges zu bestimmen** suchen.

Ziehen wir zu diesem Behufe aus dem Mittelpunkte C des Kreises Fig. 80 eine Menge Halbmesser in sehr kleinen Abständen von einander. Die von denselben in der Peripherie abgeschnittenen Bogen werden so klein seyn, daß jeder einzelne derselben keine irgend merkliche Krümmung zeigen, und folglich als gerade Linie wird betrachtet werden können. Dann besteht aber der ganze Kreis aus einer Menge kleiner Dreiecke, die mit ihren Scheiteln um den Mittelpunkt C herum liegen. Zur Höhe hat jedes dieser Dreiecke den Halbmesser des Kreises, und zur Basis einen jener kleinen Bogen der Peripherie. Die Fläche jedes solchen Dreieckes wird also durch das Produkt des Halbmessers des Kreises in den halben zugehörigen Bogen ausgedrückt werden, folglich alle Dreiecke zusammen oder der gesuchte **Flächeninhalt des Kreises dem Produkte des Halbmessers in die halbe Peripherie gleich seyn.**

Es ist demnach der von einem Kreise eingeschlossene Raum gleich einem Rechtecke über der halben Peripherie als Basis, und dem Halbmesser als Höhe.

Dieß wird noch ersichtlicher, wenn man sich zwei gleiche Kreise genau in derselben Art wie Fig. 80 durch viele gezogene Halbmesser in kleine Dreiecke zerfällt denkt, und dieselben, statt wie in Fig. 80 um den Mittelpunkt, so anordnet, wie Fig. 81 und 82 es zeigen, wo dann jeder Kreis gleichsam eine Säge zu bilden scheint, deren Zähne genau in die Zwischenräume des anderen passen; nähert man nun diese beiden Figuren einander bis die Spitzen der einen auf den Grund der anderen zu stehen kommen, so entsteht offenbar ein Parallelogram, und zwar, da die Bogen, in welche man den Umfang der Kreise theilte, sehr klein, und folglich die Winkel an den Basen der kleinen Dreiecke durchaus sehr nahe rechte Winkel, ein rechtwinkliges Parallelogram, dessen Höhe der Halbmesser, und dessen Basis die Peripherie eines der beiden gleichen Kreise ist. Zwei gleiche Kreise zusammen machen also ein Rechteck über der Peripherie und dem Halbmesser eines Kreises, und folglich ein Kreis ein Rechteck über der halben Peripherie und dem Halbmesser, da dieß letzte Rechteck die Hälfte des ersten beträgt.

111.

Um demnach die Fläche eines Kreises zu bestimmen, wird man zuerst aus seinem Halbmesser oder eigentlich aus seinem Durchmesser, d. h. dem doppelten Halbmesser nach (109) den Umfang bestimmen, davon die Hälfte nehmen, und mit dem Halbmesser multipliciren; das Produkt ist der gesuchte Flächeninhalt.

Kürzer ist das Verfahren, wenn man den Durchmesser mit sich selbst multiplicirt, dieß Produkt durch 14 theilt, und den so erhaltenen Quotienten 11mal nimmt; das Resultat ist der gesuchte Flächeninhalt. Der Grund hiervon ist jedem mit Betrachtungen dieser Art nur etwas Vertrauten leicht auffindbar; wir wollen uns von der Richtigkeit dieser Regel durch ein Beispiel überzeugen.

Wir hatten oben den Umfang der Erde gleich 5399 d. M., und den Durchmesser derselben gleich 1718 d. M. Berechnen wir nun zuerst nach der ersten, und dann nach der zweiten Regel den Flächeninhalt dieses Kreises, d. h. die Größe der Fläche, die da entsteht, wenn man sich unsere Erde durch ihren Mittelpunkt in zwei Hälften zerschnitten denkt.

Der halbe Umfang beträgt beiläufig 2700 d. M., der Halbmesser 859 d. M., also das Produkt dieser Größen beiläufig 2319000.

Nach der zweiten Regel soll man zuerst den Durchmesser, also hier die Zahl 1718, mit sich selbst multipliciren, wo man denn 2951524 erhält, diese Zahl durch 14 theilen, wo nahe der Quotient 210823 erscheint, und diesen Quotienten mit 11 multipliciren, wodurch man als Endresultat wieder beiläufig, wie früher, 2319000 findet.

Folglich führen beide Regeln auf dasselbe Resultat, nämlich daß jene Fläche 2319000 Quadratmeilen hat.

Die Zahlen stimmen nach beiden Methoden gefunden nicht vollkommen überein, weil sowohl oben, als auch hier, die Rechnung nur auf runde Zahlen geführt, und z. B. bei den Divisionen auf die Reste keine Rücksicht genommen wurde.

Die zweite Methode sieht hier länger aus, als die erste, weil man bei dieser die sonst nöthige vorläufige Bestimmnng des Umfanges aus dem Durchmesser oder umgekehrt, schon aus 109 voraussetzen konnte.

112.

Da Kreise stets unter einander ähnliche Figuren sind, so müssen sich ihre Flächeninhalte verhalten, wie die Quadrate oder zweiten Potenzen ihrer Halbmesser oder ihrer Peripherie, wie dieß denn auch aus unserer so eben gegebenen Regel für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines Kreises folgt, wo die zweite Potenz des Halbmessers stets mit denselben Zahlen multiplicirt und dividirt wird, und also offenbar die Fläche des Kreises so zu- oder abnimmt, wie das Quadrat des Halbmessers wächst oder kleiner wird.

Dreizehnter Abſchnitt.

Eigenſchaften von Kreis-Segmenten. — Die Winkel im ſelben Segmente ſind gleich. — Peripheriewinkel im Halbkreiſe ſind Rechte. — Dem Kreiſe einbeſchriebene Vierecke. — Winkel in verſchiedenen Segmenten. —

Wir haben (Fig. 83) eine Figur verzeichnet, die man das Segment oder den Abſchnitt eines Kreiſes nennt, und die, wie man ſieht, im Grunde ein unvollendeter Kreis iſt, deſſen Endpunkte A und B durch eine Gerade verbunden ſind, die man Sehne nennt. Auf dieſer Sehne ſtellten wir mehrere Winkel ſo auf, daß ihre Scheitel in der Peripherie des Kreis-Abſchnittes liegen, und ihre Schenkel durch die Endpunkte A und B der Sehne gehen. Vergleicht man nun dieſe Winkel mit einander, indem man etwa von einem derſelben ein Muſter in Papier ausſchneidet, und dieſes auf die anderen legt, ſo findet man, daß ſie unter einander gleich ſind. Es findet dieß aber bei jedem Segmente ſtatt, mag es groß oder klein ſeyn; wir haben z. B. Fig. 84 ein anderes, bei weitem kleineres, als jenes Fig. 83 verzeichnet, und finden auch hier die Winkel an der Peripherie des Bogens alle unter einander gleich, aber viel größer, als in Fig. 83; in der That waren dort die Winkel durchaus ſpitz, während ſie hier durchaus ſtumpf ſind; jenes Segment aber war größer, und dieſes iſt kleiner, als ein Halbkreis.

Was würde denn nun der Fall ſeyn, wenn das Segment ein Halbkreis ſelbſt wäre? Verzeichnen wir uns Fig. 85 einen Halbkreis, deſſen Sehne AB alſo durch den Mittelpunkt des Kreiſes geht, und folglich ein Durchmeſſer deſſelben iſt, und führen wir auch hier wieder mehrere Winkel an der Peripherie ſo auf, daß deren Schenkel ſämmtlich durch die Endpunkte A und B der Sehne, d. h. hier des Durchmeſſers, gehen. Schon die bloße Anſicht der Figur zeigt uns, daß dieſe Winkel durchaus rechte ſind, und bei näherer Unterſuchung dieſer Winkel überzeugt man ſich hiervon denn auch vollends.

Es bieten ſich uns alſo drei ſehr merkwürdige Sätze dar. Erſtens: Alle Winkel an der Peripherie eines und deſſelben Segmentes und über der Sehne deſſelben ſind einander gleich; zweitens: Wenn das Segment ein Halbkreis iſt, ſo ſind dieſe Winkel durchaus rechte; drittens: Dieſe Winkel ſind ſtumpf oder ſpitz, je nachdem das Segment kleiner oder größer als ein Halbkreis iſt.

Wir wollen nun die Sätze nach der Reihe geometriſch zu beweiſen ſuchen.

113.

Betrachten wir zuerſt einen Halbkreis Fig. 86 und errichten wir Kürze halber bloß Einen Winkel über der Sehne, die hier der Durchmeſſer iſt. Ziehen wir vom Mittelpunkte des Kreiſes C eine Linie CD nach dem Scheitel jenes Winkels, ſo entſtehen zwei

Dreiecke ACD und BCD, in welchen die Seiten AC, CD und BC, als Halbmesser desselben Kreises (93) unter einander gleich sind. Wir wissen aber aus dem Vorhergehenden, daß, wenn in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, auch die gegenüber liegenden Winkel gleich seyn müssen (23); es ist also im Dreiecke ACD der Winkel A dem Winkel ADC, und im Dreiecke BCD der Winkel B dem Winkel CDB gleich. Der Winkel in D besteht daher aus zwei Theilen, deren einer dem Winkel A, deren anderer dem Winkel B gleich kommt. Unser Peripheriewinkel D über dem Durchmesser ist also der Summe der Winkel A und B gleich, beträgt demnach die Hälfte der sämmtlichen Winkel des Dreieckes ABD, d. h. die Hälfte von zwei Rechten oder einen Rechten (38), was zu zeigen war.

Dieß gilt natürlich von jedem auf diese Art in einem Halbkreise gezogenen Winkel. Daraus folgt aber auch umgekehrt, daß wenn man (Fig. 87) auf einer und derselben Linie AB eine Reihe von rechten Winkeln errichtet, die Scheitel dieser Winkel alle in der Peripherie eines Halbkreises liegen müssen, dessen Durchmesser die Linie AB ist. Um sich hiervon zu überzeugen, wird man die Linie AB halbiren, und wenn C der Halbirungspunkt ist, in diesen Punkt C den Fuß eines Zirkels einsetzen, wo man denn finden wird, daß der andere Fuß genau durch alle Scheitel der rechten Winkel geht, wenn man ihn so gestellt, daß er durch A oder B ging.

114.

Um den zweiten der im Eingange dieses Abschnittes aufgestellten Sätze zu beweisen, müssen wir noch früher andere Eigenschaften der Winkel in einem Kreise kennen lernen, die übrigens nicht weniger interessant, als die eben behandelten sind.

Man nennt eine Figur einem Kreise einbeschrieben, wenn sämmtliche Scheitel ihrer Winkel in der Peripherie des Kreises liegen.

115.

Wir haben hier (Fig. 88) einem Kreise eine vierseitige Figur einbeschrieben, und aus dem Mittelpunkte des Kreises vier Halbmesser zu den vier Winkeln der Figur gezogen, welche, wie man sieht, diese Figur in vier Dreiecke zerfällen. Da jedes dieser Dreiecke je zwei Seiten als Halbmesser desselben Kreises einander gleich hat, so sind auch in jedem dieser Dreiecke zwei Winkel einander gleich. Die vier Winkel der einbeschriebenen Figur sind also dadurch in acht Winkel getheilt worden, und diese acht Winkel bestehen aus vier Paaren gleicher Winkel. Wir haben jedes Paar solcher gleicher Winkel mit demselben Buchstaben, ein Paar mit A, das andere mit B u. s. w. bezeichnet.

Die vier Winkel einer vierseitigen Figur machen aber nach (44) vier Rechte aus; es machen also unsere acht, mit Buchstaben bezeichneten Winkel zusammen vier Rechte; allein diese acht Winkel

enthalten die Winkel A, B, C, D zweimal; die einfachen Winkel A, B, C, D sind also zusammen der Hälfte von vier Rechten oder zwei Rechten gleich.

Betrachtet man nun die Anordnung dieser Winkel A, B, C, D näher, so sieht man, daß sie zusammen stets zwei gegenüber liegende Winkel der vierseitigen Figur bilden, indem ein Paar dieser einander gegenüber liegenden Winkel die Winkel A, B und C, D, und das andere Paar die Winkel A, D und B, C enthält. *Je zwei einander gegenüber liegende Winkel einer einem Kreise einbeschriebenen vierseitigen Figur machen also zwei Rechte aus*, ein äußerst wichtiger und nützlicher Satz, auf den wir später zurückkommen werden.

116.

Wenn zwei Winkel zusammen zwei Rechte oder 180° bilden, so heißt der eine das *Supplement* des andern; bilden zwei Winkel zusammen einen Rechten oder 90°, so heißt der eine das *Complement* des andern. Man kann also obigen Satz auch so ausdrücken: In jeder einem Kreise einbeschriebenen vierseitigen Figur ist ein Winkel das Supplement des ihm gegenüber liegenden Winkels.

117.

Es wird nun leicht seyn, den zweiten der im Eingange dieses Abschnittes aufgestellten Sätze zu beweisen.

Theilen wir einen Kreis (Fig. 89) durch eine Sehne AB in zwei Segmente, und errichten wir in dem einen Segmente über der Sehne AB den Winkel D, in dem anderen hingegen die Winkel C, E, F, G, ſo müſſen dieſe Winkel C, E, F, G offenbar alle unter einander gleich ſeyn, da nach 116 jeder von ihnen das Supplement von D ſeyn muß; mit anderen Worten, jeder der Winkel C, E, F, G muß gerade ſo viel betragen, als dem Winkel D zu 180° fehlt.

Alle über derſelben Sehne eines Kreisſegmentes errichteten Winkel ſind alſo einander gleich.

118.

Ziehen wir nun, um auch den dritten der obigen Sätze zu beweiſen, in einem Kreiſe (Fig. 90) eine Sehne AB, auf deren einer Seite ein Segment liegt, das größer als ein Halbkreis iſt, und errichten wir auf dieſer Sehne einen Peripheriewinkel ACB. Zieht man ferner durch den Mittelpunkt des Kreiſes einen Durchmeſſer DE parallel zu AB, und errichtet man auf dieſen den Peripheriewinkel DCE, der alſo nothwendig ein Rechter ſeyn wird, ſo lehrt ſchon der Augenſchein der Figur, daß in dieſem und überhaupt in jedem Segmente, welches größer als ein Halbkreis iſt, der Peripheriewinkel auf der Sehne ein ſpitzer ſey.

119.

Verzeichnet man endlich ein Segment (Fig. 91), welches kleiner als ein Halbkreis iſt, und in daſſelbe

den Peripheriewinkel **ACB**, ergänzt man den halben Kreis, zieht zu **AB** parallel einen Durchmesser **DE**, und errichtet auf diesen den Peripheriewinkel **DCE**, der also ein Rechter seyn wird, so lehrt wieder schon der Augenschein, daß in diesem, und überhaupt *in jedem Segmente, welches kleiner als ein Halbkreis ist, der Peripheriewinkel über der Sehne ein stumpfer sey.*

Aus dem Vorhergehenden folgt nun auch allgemein, daß wenn man über derselben geraden Linie mehrere einander gleiche Winkel errichtet, die Scheitel derselben sämmtlich in der Peripherie eines Kreissegmentes liegen, dessen Sehne jene gerade Linie bildet. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man einen Winkel etwa in Papier ausschneidet, und über einer geraden Linie so bewegt, daß dessen Schenkel stets durch die Endpunkte jener Geraden gehen.

Bringt man in dem Scheitel dieses Winkels ein Reißblei an, so macht dieses bei jener Bewegung einen Halbkreis, wenn der Winkel ein Rechter, ein Segment, das größer als ein Halbkreis, wenn der Winkel ein spitzer, und endlich ein Segment, das kleiner als ein Halbkreis, wenn jener Winkel ein stumpfer ist.

Vierzehnter Abschnitt.

Parallele Sehnen. — Eine Tangente zu ziehen. — Einander schneidende Sehnen. — Einbeschriebene und umschriebene Figuren. — Einbeschriebene Polygone.

120.

Wir haben Fig. 92 in einem Kreise eine Anzahl zu einander paralleler Sehnen, und einen Durchmesser AB senkrecht auf diese Sehnen gezogen. Vergleicht man nun etwa mit einem Zirkel die Theile einer und derselben Sehne auf beiden Seiten des Durchmessers, so findet man diese Theile durchaus gleich, d. h. die Sehnen werden von dem Durchmesser durchaus halbirt. Hiervon kann man sich aber auch geometrisch leicht auf folgende Weise überzeugen:

121.

Ziehen wir vom Mittelpunkte C des Kreises zu den Endpunkten D, E einer jener parallelen Sehnen die Geraden DC und CE, so entsteht, da CD und CE Halbmesser, also einander gleich sind, ein gleichschenkliges Dreieck DCE, in welchem CF auf die Basis senkrecht gefällt ist. In diesem Falle aber wird nach (24) die Basis vom Lothe halbirt. Also theilt der Durchmesser AB die Sehne DE in zwei gleiche Theile, und dasselbe läßt sich von jeder anderen der DE parallelen Sehne nachweisen.

Parallele Sehnen werden alſo von einem auf dieſelben ſenkrechten Durchmeſſer durchaus halbirt.

122.

Wir haben nun ſchon oft Halbmeſſer aus dem Mittelpunkte eines Kreiſes ziehen müſſen. Wie findet man aber dieſen Mittelpunkt, wenn er zufällig nicht bekannt ſeyn ſollte?

Der eben (121) aufgeſtellte Satz gibt uns ein Mittel hierzu. Man wird nämlich in dem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt man ſucht, eine Sehne ziehen, dieſe Sehne halbiren, auf den Halbirungspunkt derſelben eine Senkrechte errichten, und dieſe verlängern, bis ſie dem Umfange des Kreiſes auf beiden Seiten begegnet. Nach (121) muß dieſe Linie ein Durchmeſſer des Kreiſes ſeyn. Halbirt man nun dieſen Durchmeſſer, ſo iſt der Halbirungspunkt der geſuchte Mittelpunkt des Kreiſes.

123.

Ebenſo wird man zum Ziele gelangen, wenn man eine zweite Sehne zieht, und wieder auf ihren Halbirungspunkt eine Senkrechte errichtet, die alſo ebenfalls ein Durchmeſſer des Kreiſes ſeyn wird. Da nun der Mittelpunkt des Kreiſes ſowohl im erſten als zweiten Durchmeſſer liegen muß, ſo kann nur ein beiden Durchmeſſern gemeinſchaftlicher Punkt, d. h. es muß der Durchſchnittspunkt beider Durchmeſſer der geſuchte Mittelpunkt des Kreiſes ſeyn.

124.

Errichten wir in dem Endpunkte A (Fig. 93) eines Halbmessers CA eine auf CA senkrechte Linie DE, so liegt offenbar diese ganze Linie außerhalb des Kreises, und berührt denselben nur im Punkte A. Dieß können wir aber auch geometrisch so nachweisen:

Gehen wir zu diesem Behufe auf die Fig. 25 zurück, und nehmen wir an, AB stehe dort senkrecht auf AC, so sind die dort gebildeten Dreiecke lauter rechtwinklige, deren Hypothenusen BC, als dem rechten Winkel gegenüber liegend, durchaus größer sind, als die Kathete AB, welche dem spitzen Winkel C gegenüber liegt. Die kürzeste von einem Punkte B zu einer Geraden AC ziehbare Linie ist also die auf diese Gerade AC senkrechte AB.

Wenden wir dieß nun auf Fig. 93 an, so folgt daraus, daß zwischen dem Mittelpunkte C und der Geraden DE die kürzeste Linie der auf DE senkrechte Halbmesser CA ist. Alle übrigen von C zur Linie DE gezogenen Linien sind also länger, als CA, d. h. als der Halbmesser des Kreises, oder alle Punkte der Linie DE außer dem Punkte A, welcher in der Peripherie des Kreises liegt, befinden sich weiter vom Mittelpunkte des Kreises, als dessen Umfang, d. h. sie liegen außerhalb des Kreises.

125.

Zieht man hingegen eine Linie HG, die nicht senkrecht auf dem Halbmesser des Kreises steht, so

lehrt ſchon der Augenſchein, daß dann eine Menge Punkte der Geraden HG innerhalb des Kreiſes liegen, oder näher am Mittelpunkt ſtehen, als der Punkt A.

126.

Eine ſolche Linie, wie DE, nennt man eine Tangente, und den Punkt A den Berührungspunkt.

127.

Um alſo eine Tangente zu einem Kreiſe zu ziehen, hat man bloß durch den Endpunkt eines Halbmeſſers eine Linie ſenkrecht auf dieſen Halbmeſſer zu errichten.

128.

Wir haben Fig. 94 in einem Kreiſe zwei einander durchſchneidende Sehnen AB und CD verzeichnet, und die Endpunkte derſelben ſo verbunden, daß zwei Dreiecke DEB und AEC daraus entſtanden. Die Winkel bei E ſind als Scheitelwinkel einander gleich. Aus (117) aber wiſſen wir, daß Peripheriewinkel über demſelben Segmente gleich ſind; da nun die Winkel B und C über demſelben Segmente, deſſen Endpunkte A und D ſind, ſtehen, ſo ſind auch dieſe Winkel, und ebenſo die Winkel A und D einander gleich, weil ſie gleichfalls Peripheriewinkel über demſelben Segment, deſſen Endpunkte B und C ſind, vorſtellen. Die beiden Dreiecke haben alſo ihre Winkel ſtückweiſe gleich, und ſind demnach (76) ähnliche Dreiecke.

Es verhält sich daher BE zu AE, wie CE zu DE, oder bei sich schneidenden Sehnen sind die Stücke der Sehnen unter einander proportional.

129.

Daraus folgt aber ferner, daß das Rechteck über den Linien AE und BE dem Rechtecke über den Linien CE und DE gleich sey, denn die Basis des ersten Rechtecks verhält sich zur Basis des zweiten, wie die Höhe des zweiten sich verhält zur Höhe des ersten; unter diesen Umständen aber sind zwei Rechtecke nach (90) einander gleich.

Wenn also zwei Sehnen eines Kreises sich schneiden, so ist das Rechteck über den Stücken der einen dem Rechtecke über den Stücken der anderen Sehne gleich.

130.

Man sagt von einer Figur, daß sie einem Kreise umschrieben sey, wenn alle Seiten derselben Tangenten zum Kreise sind.

Erinnert man sich der in (114) gegebenen Erklärung einer einbeschriebenen Figur, so sieht man von selbst, daß man einem Kreise eine regelmäßige Figur von einer gewissen Anzahl gleicher Seiten einschreiben kann, wenn man den Umfang des Kreises in eben so viele gleiche Theile theilt. So wird man, um einem Kreise ein regelmäßiges, h. d. gleichseitiges Dreieck einzuschreiben, den Um-

fang des Kreiſes in drei gleiche Theile theilen, und die Theilungspunkte durch gerade Linien verbinden; ebenſo wird man, um einem Kreiſe ein Quadrat, d. h. ein regelmäßiges Viereck einzuſchreiben, den Kreis in vier gleiche Theile theilen, und die Theilungspunkte durch Gerade verbinden u. ſ. f. für andere regelmäßige Figuren.

Um aber den Umfang eines Kreiſes in mehrere gleiche Theile zu theilen, wird man z. B. den Raum um den Mittelpunkt in eben ſo viele gleiche Winkel theilen; die Halbmeſſer, welche die Schenkel der Winkel bilden, werden am Umfange des Kreiſes die geſuchten Theilungspunkte geben. Jene Theilung des Raumes um den Mittelpunkt wird man mit einem Winkel meſſenden Inſtrumente, z. B. mit dem gewöhnlichen Transporteur vornehmen.

Um aber auch unabhängig von einem ſolchen Inſtrumente, und bloß mit Hülfe eines Lineales und eines Zirkels einem Kreiſe eine regelmäßige Figur einzuſchreiben, wird man auf eine Art verfahren, die wir nun in einigen Beiſpielen erläutern wollen.

131.

Will man einem Kreiſe ein Quadrat einſchreiben, ſo wird man in dem Kreiſe zwei auf einander ſenkrechte Durchmeſſer ziehen, wie dieß in Fig. 95 geſchehen iſt. Die Geraden, welche die Endpunkte dieſer Durchmeſſer verbinden, bilden offenbar ein Quadrat, denn erſtens ſind die Seiten der hie-

verzeichneten Figur unter einander gleich, weil sie Sehnen gleicher Bogen sind, und zweitens sind die Winkel dieser Figur durchaus Rechte, weil sie durchaus Peripheriewinkel über einen Halbkreis bilden (113).

132.

Da jede Figur eben so viele Seiten als Winkel hat, so nennt man eine Figur von fünf Seiten ein Fünfeck, eine Figur von sechs Seiten ein Sechseck u. s. w. Alle Figuren aber, die mehr als vier Seiten haben, faßt man unter der Benennung Vieleck oder Polygon (von zwei griechischen Worten, die viel und Winkel heißen) zusammen.

133.

Um nun z. B. ein regelmäßiges Achteck einem Kreise einzuschreiben, wird man nur die Seiten eines dem Kreise nach (131) einbeschriebenen Quadrates Fig. 96 halbiren, und Halbmesser durch die Halbirungspunkte führen dürfen. Verbindet man dann die Endpunkte dieser Halbmesser mit den Ecken des Quadrates durch gerade Linien, so entsteht offenbar ein dem Kreise einbeschriebenes regelmäßiges Achteck.

134.

Ebenso wird man, um ein regelmäßiges Sechszehneck dem Kreise einzuschreiben, nur zuerst ein regelmäßiges Achteck einschreiben, die Seiten dieses Achteckes halbiren, und Halbmesser durch die Hal-

birungspunkte ziehen. Der Umfang des Kreises wird auf diese Art in sechszehn gleiche Theile getheilt, und die Theilungspunkte mit einander durch Gerade verbunden, geben das gesuchte dem Kreise einbeschriebene regelmäßige Sechszehneck.

Eben so wird man ein Zweiunddreißigeck oder Vierundsechszigeck, und überhaupt jede regelmäßige Figur dem Kreise einschreiben, deren Seiten doppelt so viele sind, als die der vorhergehenden Figur.

135.

Um ein gleichseitiges Dreieck einem Kreise einzuschreiben, wird man einen Durchmesser ziehen, und (Fig. 97) den Halbmesser CA in F halbiren, dann durch F eine Gerade BD senkrecht auf AC führen. Die Punkte B, E, D theilen den Kreis in drei gleiche Theile. Ziehen wir, um uns hiervon zu überzeugen, die Linien CD und AD. Da F der Halbirungspunkt von AC ist, so sind CF und FA einander gleich, somit werden in den Dreiecken CFD und AFD die rechten Winkel von einander gleichen Seiten eingeschlossen, und es müssen folglich (17) auch die Seiten CD und DA einander gleich seyn. Das Dreieck CDA ist also ein gleichseitiges, da alle Seiten desselben dem Halbmesser des Kreises gleich kommen; der Winkel ACD hat (98) demnach 60°; aus demselben Grunde muß auch der Winkel ACB 60° betragen, somit beide zusammen, oder der Winkel DCB 120° haben. Da ferner die Winke

ECD und DCA zuſammen 180° bilden müſſen, ſo hat der Winkel DCE ebenfalls 120°, und endlich muß, da die drei Winkel BCD, DCE und ECB zuſammen 360° machen, auch der Winkel ECD 120° haben.

Die Bogen BD, DE und EB, in welche man auf dieſe Weiſe den Umfang des Kreiſes theilt, ſind alſo unter einander gleich, und es bilden die Verbindungslinien zwiſchen den Theilungspunkten in der That ein dem Kreiſe eingeſchriebenes gleichſeitiges Dreieck BDE.

136.

Nachdem wir aber ſo dem Kreiſe ein regelmäßiges Dreieck einſchreiben gelernt haben, wird es nach dem obigen (134) ein leichtes ſeyn, ein regelmäßiges Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck u. ſ. w. einzuſchreiben. So hat man z. B. in Fig. 98 dem Kreiſe ein regelmäßiges Sechseck eingeſchrieben, indem man zuerſt ein gleichſeitiges Dreieck einſchrieb, dann die Seiten dieſes Dreieckes halbirte, durch die Halbirungspunkte Halbmeſſer zog, und die ſo am Umfange des Kreiſes bemerkten Theilungspunkte durch Gerade verband.

137.

Kann man einmal eine regelmäßige Figur von einer gewiſſen Anzahl Seiten dem Kreiſe einſchreiben, ſo iſt nichts leichter, als eine regelmäßige Figur von derſelben Anzahl Seiten dem Kreiſe zu um-

ſchreiben (130). Man wird nämlich nur durch die Scheitel der Winkel der einbeſchriebenen Figur Tangenten zum Kreiſe zu ziehen brauchen. So haben wir in Fig. 99 ein gleichſeitiges Dreieck dem Kreiſe umſchrieben, und daſſelbe in Fig. 100 mit einem Quadrate gethan. Auf dieſelbe Art wird jede regelmäßige Figur dem Kreiſe umſchrieben, indem man vorher eine regelmäßige von derſelben Anzahl Seiten dem Kreiſe einſchreibt.

Außer dem Kreiſe gibt es unendlich viele verſchiedene krumme Linien; die Unterſuchung ihrer Eigenſchaften und Anwendungen macht einen großen Theil der höheren Geometrie aus. Keine derſelben erreicht jedoch an häufigem Vorkommen ſowohl und Nutzen, als an Leichtigkeit in ihrer Erklärung den Kreis; weßhalb Elementar-Geometrien keine andere krumme Linie in Betrachtung ziehen.

Fünfzehnter Abſchnitt.

Flächen und Körper. — Ebenen. — Krumme Flächen. — Ein Würfel. — Kubikzoll. — Parallelopipede. — Ihre Zerfällung in Würfel. — Numeriſcher Ausdruck des körperlichen Inhaltes eines Parallelopipedes.

138.

Wir wollen nun im Folgenden uns mit den wichtigſten Eigenſchaften der Flächen und Körper bekannt machen.

Unter **Körper** aber versteht man in der Geometrie jeden von Flächen eingeschlossenen Raum, so daß die Flächen ganz ebenso als Gränzen der Körper, wie die Linien als Gränzen der Flächen sich darstellen.

In seiner ganzen Ausdehnung ist dieser Theil der Geometrie einer der schwierigsten; aber so wie sich bei Anfängern die Lehre von den Linien auf die Gerade und den Kreis beschränkt, so wollen wir auch von den Flächen und Körpern nur die einfachsten kennen lernen, die glücklicherweise zugleich die nützlichsten und wichtigsten sind.

Die einfachste Fläche ist die ebene Fläche oder, wie sie in der Geometrie heißt, die **Ebene**.

Das augenfälligste Bild einer Ebene ist die Oberfläche einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit, z. B. eines völlig wellenlosen See's.

Eine Ebene ist offenbar unter den Flächen, was eine Gerade unter den Linien ist. Um uns zu überzeugen, ob eine Linie gerade ist, spannten wir einen Faden von einem Ende derselben zum andern; deckt der Faden die Linie überall gleichmäßig, so ist diese eine Gerade; weicht hingegen die Linie von dem Faden irgendwo ab, so ist jene eine krumme. Ganz ebenso werden wir nun auch bei einer Ebene verfahren. Spannen wir nämlich einen Faden von irgend einem Punkte der Ebene zu irgend einem andern Punkte der Ebene, so muß, wenn die unter-

suchte Fläche wirklich eine Ebene ist, der Faden dieselbe durchaus gleichmäßig berühren.

Indeß wird man nicht immer dieß Berühren als einen Beweis für das Ebenseyn der fraglichen Fläche betrachten können. So wird z. B. ein Faden, den man längs eines runden Stabes spannt, oder um denselben herumlegt, den Stab allerdings durchaus gleichmäßig berühren können, und doch die Oberfläche des Stabes offenbar eine Krumme seyn; allein bei näherer Betrachtung sehen wir, daß im ersten Falle der Faden nur in einer gewissen, bestimmten Lage der Bedingung des Anliegens entspricht, und daß im zweiten Falle der Faden auf eine Art gespannt wird, wo er aufhört eine gerade Linie darzustellen, und man im Grunde nur dem Widerstande des Stabes zuzuschreiben hat, wenn der Faden nicht in denselben eindringt, statt ihn von außen zu berühren.

Wenn also ein zwischen zwei Punkten einer Fläche gespannter Faden durch sein Anliegen an derselben beweisen soll, daß die Fläche eine Ebene ist, so muß der Faden die Fläche berühren, ohne irgend einen Druck auf dieselbe zu üben, und dieß nicht bloß zwischen gewissen zwei Punkten der Fläche, sondern zwischen jeden, beliebig gewählten zwei Punkten derselben thun.

So gelangen wir zu dem Begriff einer Ebene, der in der That auch in der Geometrie so gegeben wird. Man nennt nämlich hier eine Ebene ein

solche Fläche, in welcher man von jedem Punkte zu jedem anderen stets eine gerade Linie ziehen kann, welche die Fläche nirgends verläßt; eine Eigenschaft, die keine andere Fläche hat. Während man z. B. wohl auf der Oberfläche des oben besprochenen Stabes zwischen zwei gewissen Punkten eine, in der Fläche selbst liegende gerade Linie ziehen kann, ist dieß doch nicht möglich zwischen irgend zwei anderen, beliebigen Punkten jener Oberfläche; ja es gibt krumme Flächen, in denen man durchaus keine Geraden ziehen kann, wie z. B. die Oberfläche eines Eies.

139.

Man sieht nun von selbst, daß die Ebene die einfachste aller Flächen ist, und wir wollen deßhalb auch mit der Erklärung solcher Körper beginnen, die lediglich von Ebenen gebildet werden.

Der erste Körper, mit dessen Eigenschaften wir uns bekannt machen wollen, sey der Würfel oder Kubus, den Fig. 101 vorstellt.

140.

Man nennt die Ebenen, welche einen Körper umschließen, seine Seiten, und die Geraden, welche die Gränzen jener Ebenen bilden, seine Kanten.

141.

Ein Würfel hat nun sechs Seiten, die unter einander gleiche Quadrate, und zwölf Kanten, die durchaus gleich lang sind.

Beträgt die Länge einer solchen Kante einen Zoll, so ist offenbar jede der sechs Seiten ein Quadratzoll, und man nennt in diesem Falle den Würfel einen Kubikzoll. Messen jene Kanten einen Fuß, eine Klafter u. s. w., so heißt der entsprechende Würfel ein Kubikfuß, eine Kubikklafter u. s. w.

Ein Würfel ist unter den Körpern, was ein Quadrat unter den Flächen, und so wie man Flächen mit Quadraten ausmißt, so bestimmt man auch die Größe eines Körpers nach Würfeln, und sagt, er habe so und so viele Kubikzolle oder Kubikfuße u. dgl.

Alle an einem Würfel vorkommenden Winkel sind Rechte; je drei Kanten stoßen in jeder Ecke durchaus unter rechten Winkeln zusammen, und je zwei der Seiten des Würfels treffen sich in einer Kante stets ebenfalls unter rechten Winkeln. Aber diese Eigenschaft kommt eben so wenig unter den Körpern dem Würfel ausschließlich zu, als sie unter den Flächen bloß das Quadrat auszeichnet. Es gibt eben so gut durchaus rechtwinklige Körper mit ungleichen Kanten, als es Rechtecke mit ungleichen Seiten gibt. Wir haben in Fig. 102 zwei gleiche Würfel über einander gesetzt, und dadurch einen Körper gebildet, der wie der Würfel Fig. 101 rechtwinklige Ecken hat, aber dessen Seiten keineswegs durchaus Quadrate sind. Bloß die unterste Seite und die oberste blieben Quadrate, die senkrechte Seiten hingegen sind Rechtecke geworden, deren je

zweien jener Quadrate gleichkommt. Sind jene Quadrate Quadratzolle, so betragen diese Rechtecke zwei Quadratzolle.

Ein solcher Körper hört aber auf, ein Kubus zu heißen, und verhält sich zu diesem ganz ebenso wie ein Rechteck zum Quadrate.

142.

Es gibt eine gewisse Gattung Körper, die unter den körperlichen Figuren gerade das sind, was die Parallelograme unter den ebenen Figuren; man nennt sie Parallelopipede.

Der eben in Fig. 102 dargestellte Körper ist ein rechtwinkliges Parallelopiped. Stellen wir in Fig. 103 drei gleiche Würfel, etwa lauter Kubikzolle, übereinander, so ist der so entstehende Körper gleich drei Kubikzollen und offenbar ebenfalls ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Höhe aber dreimal so groß als die Basis ist. In demselben Maaße also, in welchem man die Höhe eines Parallelopipedes vergrößert, nimmt auch das Parallelopiped selbst an Größe zu; beträgt seine Höhe zwanzig Zolle, so faßt es zwanzig Kubikzolle, beträgt die Höhe dreißig Zolle, so hat das Parallelopiped dreißig Kubikzolle u. s. f.

Setzen wir sechs Kubikzolle auf die in Fig. 104 angezeigte Art auf und neben einander, so entstehen zwei rechtwinklige Parallelopipede, die mitsammen einen Körper bilden, der von allen bisher betrachteten

verschieden ist. Die oberste und unterste Fläche dieses Körpers sind Rechtecke, deren Seiten ein und zwei Zolle messen; zwei der senkrechten Flächen sind Rechtecke über einen und drei Zolle, und zwei sind Rechtecke über zwei und drei Zolle. In der Basis des Körpers sind zwei Quadratzolle enthalten, die Höhe desselben beträgt drei Zolle. Multiplicirt man diese beiden Zahlen, nämlich die Anzahl Quadratzolle der Basis mit der Anzahl Zolle der Höhe, so erhält man die Zahl sechs zum Produkt, und dieß ist gerade die Anzahl der in dem Körper enthaltenen Kubikzolle.

Dieß Verfahren wäre ganz ähnlich dem, welches wir oben für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines Rechteckes durch Multiplication der Basis in die Höhe fanden, und in der That ist dasselbe auch ebenso allgemein gültig, wie dieses, wovon wir uns durch die folgende Schlußfolge überzeugen können.

Sey Fig. 105 ein Rechteck, dessen Seiten fünf und sechs Zolle lang sind, und welches demnach dreißig Quadratzolle faßt, die wir auch hier verzeichneten, indem wir die einen zwei Seiten in fünf, die anderen in sechs gleiche Theile theilten, und die Theilungspunkte der einander gegenüber liegenden Seiten durch gerade Linien verbanden. Setzte man nun auf jeden dieser Quadratzolle einen Kubikzoll, so entsteht auf diese Art ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Basis dreißig Quadratzolle faßt, un

das einen Zoll Höhe hat. Es sind aber im Ganzen gerade dreißig Kubikzolle vorhanden.

Stellte man nun auf jeden dieser Kubikzolle wieder einen Kubikzoll, so würde ein Körper entstehen, der sechszig Kubikzolle faßte; dieser Körper aber wäre ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Basis dreißig Quadratzolle hat, und dessen Höhe zwei Zolle mißt, u. s. f. für alle senkrechte Parallelopipede, da man sich offenbar jeden solchen Körper auf die eben betrachtete Art in Schichten von Kubikzollen zerlegt denken kann, wo dann so viele solcher Schichten seyn werden, als die Höhe des Parallelopipedes Zolle mißt, und jede solche Schichte so viele Kubikzolle enthalten wird, als die Basis des Parallelopipedes Quadratzolle hat. Wir haben demnach für die Bestimmung der Größe, oder, wie man dieß in der Geometrie nennt, des körperlichen Inhaltes eines senkrechten Parallelopipedes folgende Regel:

143.

Der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedes, ausgedrückt in Kubikzollen, Kubikfußen u. s. w., ist gleich dem Produkte der Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w., welche die Basis enthält, in die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w., welche die Höhe des Parallelopipedes begreift.

Das Jedem zunächst liegende Beispiel eines rechtwinkligen Parallelopipedes ist ein gewöhnliches

regelmäßig gestaltetes Zimmer, da Decke, Wände und Fußboden durchaus unter rechten Winkeln zusammenstoßen, und jede Ecke von drei rechten Winkeln gebildet wird. Wenn also ein Zimmer z. B. 20 Fuße lang, 15 breit, und 14 hoch ist, so enthält es offenbar 4200 Kubikfuße, denn die Basis oder hier der Fußboden hat 15 mal 20, d. h. 300 Quadratschuhe, die Höhe beträgt 14 Fuße, also der körperliche Inhalt 14 mal 300, d. h. 4200 Kubikfuße.

Sechszehnter Abschnitt.

Zerfällung von Parallelopipeden in Säulen und Schichten. — Senkrechte Körper im Allgemeinen. — Methode, ihren Körperinhalt zu bestimmen. — Prismen. — Cylinder. — Vergleichung beider Körper in Bezug auf ihren Körperinhalt. — Schnitte durch diese Körper.

144.

Man kann sich ein rechtwinkliges Parallelopiped eben so gut, als, wie wir es eben thaten, aus parallelen Schichten, auch aus senkrechten Säulen zusammengesetzt, vorstellen. Denkt man sich nämlich auf jeden Quadratzoll der Basis eine Säule aus Kubikzollen errichtet, so wird das Parallelopiped offenbar so viele solcher Säulen enthalten, als die Basis Quadratzolle hat, und jede solche Säule so

viele Kubikzolle faſſen, als die Höhe des Parallelopipedes Zolle mißt.

Hätten wir die Baſen der einzelnen Säulen kleiner als einen Quadratzoll gemacht, ſo würde natürlich daſſelbe Parallelopiped eine viel größere Anzahl ſolcher kleinerer Säulen enthalten. So z. B. wenn man das Parallelopiped ſich aus Säulen zuſammengeſetzt dächte, deren Baſis nur das Quadrat des $^1/_{100}$ Theiles eines Zolles betrüge, ſo würden erſt 10000 ſolcher kleiner Säulen eine derjenigen Säulen bilden, die wir uns früher über einen Quadratzoll errichtet dachten, da ein Quadratzoll 10000 der kleinen Quadrate enthält, die über dem $^1/_{100}$ eines Zolles errichtet werden.

Denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelopiped in ſehr viele, ſehr dünne Säulen dieſer Art zerlegt. Indem man die Anordnung dieſer Säulen ändert, kann man einen anderen ſenkrechten Körper bilden, deſſen Baſis zwar gleichen Flächenraum einnimmt, wie die Baſis des Parallelopipedes, aber doch völlig verſchieden geſtaltet iſt. Laſſen wir dieſe neue Baſis z. B. ein Dreieck ſeyn, ſo wird das rechtwinklige Parallelopiped in eine aufrechtſtehende dreieckige Säule verwandelt werden, etwa wie die durch Fig. 106 vorgeſtellte. Zwar werden die Seiten dieſes neuen Körpers keine vollkommenen Ebenen ſeyn, da die Schneiden der kleinen Säulen, aus denen wir den Körper zuſammenſetzten, nothwendig Unebenheiten bilden müſſen; allein in je

mehr solcher schmalen Säulen wir das ursprüngliche Parallelopiped uns zerfällt denken, desto dünner werden diese Säulen, und desto kleiner auch die Unebenheiten ausfallen, die sie bei ihrer Aneinandersetzung zwischen sich übrig lassen, bis endlich jene Zerfällung des Parallelopipedes hinreichen wird, alle Zwischenräume verschwinden, und die Seiten des Körpers Fig. 106 völlig eben erscheinen zu machen.

Ebenso aber, wie hier diesen dreieckigen, wird man jeden anderen aufrechten Körper durch verschiedene Anordnung der kleinen Säulen bilden können, und alle diese Körper werden gleiche Höhe und dem Flächeninhalte nach gleich große Basis mit dem ursprünglichen Parallelopipede haben.

Aus Allem dem folgt nun, daß der körperliche Inhalt aller Körper, die von senkrechten Seiten gebildet werden, lediglich von der Größe ihrer Basis und ihrer Höhe, aber durchaus nicht von ihrer Gestalt abhänge.

145.

Unser oben (143) für rechtwinklige Parallelopipede aufgestellte Lehrsatz gilt also allgemein für alle Gattungen senkrechter Körper, und man findet stets deren körperlichen Inhalt, z. B. in Kubikzollen, wenn man die Anzahl Quadratzolle der Basis in die Anzahl Zolle der Höhe multiplicirt.

Dieser Satz dehnt sich offenbar auch auf senkrechte Körper mit kreisförmiger, oder sonst

krummliniger Basis aus, und man wird daher nach ihm auch den Inhalt eines wie immer gestalteten Gefäßes bestimmen können, wofern dasselbe nur senkrechte Wände hat. Diese letzte Bedingung ist aber wohl im Auge zu behalten, da obiges z. B. bei einem gewöhnlichen Fasse, dessen Dauben in der Mitte vorspringen, und also keineswegs senkrechte Wände bilden, keine Anwendung findet.

146.

Durch das Vorhergehende sind wir nun in den Stand gesetzt, Körper von senkrechten Seiten ihrer Größe nach zu vergleichen, wie verschieden auch ihre Basen gestaltet seyn mögen. Wenn z. B. zwei solche Körper dem Flächenraume nach gleiche Basen hätten, deren eine aber ein Dreieck, und deren andere ein Viereck wäre, und wenn die Höhe des einen zwei Drittheile der Höhe des anderen Körpers betrüge, so müßten offenbar ihre körperlichen Inhalte in demselben Verhältnisse, wie ihre Höhen, stehen, und also der eine zwei Drittheile des anderen Körpers fassen.

Wären umgekehrt die Höhen zweier solcher Körper gleich und die Basen verschieden, so müßten die körperlichen Inhalte sich wie die Flächeninhalte der Basen verhalten.

Senkrechte Körper von ungleicher Basis können also gleiche Flächeninhalte haben, wenn die Basis des einen in demselben Verhältnisse kleiner ist, als

die Basis des anderen, in welchem die Höhe des ersten größer ist als die Höhe des zweiten, denn was dann der eine Körper an Höhe verliert, gewinnt er an Breite und umgekehrt.

147.

Körper von senkrechten Seiten, wie die eben betrachteten, die man im gemeinen Leben Säulen nennt, heißen in der Geometrie gerade Prismen, und werden, je nach der Anzahl ihrer senkrechten Seiten, in dreiseitige, vierseitige u. s. f. unterschieden. Fig. 106 stellt also ein dreiseitiges gerades Prisma vor; vierseitige gerade Prismen sind gerade Parallelopipede, und, wenn die Basis ein Rechteck ist, rechtwinklige Parallelopipede; ein vierseitiges gerades Prisma mit durchaus gleichen Seiten, d. h. lauter Quadraten, ist, was wir früher einen Würfel nannten.

148.

Ein Prisma mit kreisförmiger Basis heißt ein Cylinder, von einem griechischen Worte, welches „rollen“ bedeutet.

149.

Ein Cylinder ist also einem Prisma im körperlichen Inhalte gleich, wenn beide Körper gleich große Basis und Höhe haben, und unterscheidet sich in diesem Falle nur durch die Gestalt von demselben.

150.

Wenn man eine Anzahl Münzen so über einander legt, daß sie einen senkrechten Cylinder Fig. 107 bilden, und hierauf die Münzen gleichmäßig verschiebt, wodurch sie in einen schiefen Cylinder Fig. 108 zu liegen kommen, so entstehen zwei Körper, die offenbar gleiche Basis, gleiche Höhe, und, da überall dieselben Münzen verwendet sind, auch gleichen Körperinhalt haben. Diese Bemerkung führt uns zu einem höchst merkwürdigen geometrischen Satze, vermöge welchem die eben für senkrechte Prismen und Cylinder gefundene Bestimmungsart des körperlichen Inhaltes auch auf schiefe Körper dieser Art ausgedehnt wird, gerade wie wir oben (65) von Rechtecken auf Parallelograme im Allgemeinen übergingen. Denn was wir eben vom Cylinder sahen, gilt offenbar auch von Parallelopipeden; legt man z. B. einen Pack Spielkarten so zusammen, daß sie ein senkrechtes Parallelopiped Fig. 109 bilden, so hat dieser Körper offenbar denselben körperlichen Inhalt, wie das durch gleichmäßige Verschiebung derselben Karten nach einer gewissen Richtung entstandene schiefe Parallelopiped Fig. 110, oder das durch Verschiebung in entgegengesetzter Richtung gebildete Fig. 111, wenn in allen drei Körpern gleich viele und gleich große Karten vorhanden sind. Der körperliche Inhalt solcher Körper bleibt also ungeändert, so lange Basis und Höhe dieselben bleiben.

151.

Alle ſolchen Körper, die die einander gegenüber liegenden Seiten parallel haben, begreift man unter dem Namen Parallelopipede, und unterſcheidet ſie in gerade und ſchiefe, je nachdem vier Seiten derſelben auf die beiden anderen Seiten ſenkrecht ſtehen oder nicht. Ein rechtwinkliges Parallelopiped, wie wir es oben betrachteten, iſt alſo ein gerades, durchaus von Rechtecken gebildetes.

152.

Ihr körperlicher Inhalt iſt ſtets gleich dem Produkte der Baſis in die Höhe, wo man unter Höhe eine von irgend einem Punkte der oberſten Seite auf die unterſte, oder auf deren Erweiterung gezogene Senkrechte verſteht.

153.

Schneidet man beliebig und ganz unregelmäßig geſtaltete, aber unter einander gleiche Figuren aus Papier aus, ſo kann man, indem man dieſelben auf einander legt, gerade und ſchiefe Prismen der mannigfaltigſten Art bilden, die alle gleiche Baſis, gleiche Höhe und gleichen körperlichen Inhalt haben.

154.

Gerade Prismen ſind alſo ſchiefen gleich, wofern ſie nur mit denſelben gleiche Baſis und gleiche Höhe haben.

155.

Wenn man ſich einen Körper durch eine Ebene getheilt denkt, ſo heißt die Theilungs-Ebene ein Schnitt.

156.

Schneidet man ein Prisma parallel zu ſeiner Baſis, ſo iſt der Schnitt eine der Baſis ähnliche und gleiche Figur. Ein dreiſeitiges Prisma gibt in dieſem Schnitte immer ein ſeiner Baſis congruentes Dreieck, ein Parallelopiped ein ſeiner Baſis gleiches und ähnliches Parallelogram u. ſ. w. Dieß wird von ſelbſt erſichtlich, wenn wir bedenken, daß dieſe Körper ja eben dadurch entſtehen, daß man gleiche und ähnliche Figuren über einander legt; ſo muß alſo z. B. der zur Baſis parallele Schnitt eines Cylinders durchaus einen dieſer Baſis gleichen Kreis geben.

157.

Ein Prisma hat demnach in allen Punkten gleiche Geſtalt und gleichen Umfang.

Siebzehnter Abſchnitt.

Pyramiden und Kegel. — Vergleichung ihres körperlichen Inhaltes. — Pyramiden und Kegel, verglichen mit Prismen und Cylindern.

158.

Wir ſahen ſoeben, daß ein zur Baſis paralleler Schnitt des Prisma überall der Größe, wie der Geſtalt nach dieſelbe Figur gibt. Nun wollen wir eine Gattung Körper kennen lernen, in welchen zur Baſis parallele Schnitte zwar unter einander ähnliche, aber keineswegs gleich große Figuren bilden. Fig. 112 ſtellt uns einen Körper vor, deſſen Baſis die fünfſeitige Figur **ABCDE** iſt; jeder zu dieſer Grundfläche parallele Schnitt iſt zwar auch eine der Baſis ähnliche fünfſeitige Figur, nimmt aber in der Größe ſtufenweiſe ab, je näher man zu der Spitze **P** des Körpers gelangt.

Man nennt ſolche Körper in der Geometrie *Pyramiden*, von einem griechiſchen Worte, welches „Flamme“ bedeutet, weil dieſelben mit einer Kerzenflamme viele Aehnlichkeit haben. Je nachdem die Baſis einer Pyramide ein Dreieck, Viereck u. ſ. w. iſt, unterſcheidet man *dreiſeitige*, *vierſeitige* u. ſ. w. Pyramiden. Die Seiten dieſer Körper ſind offenbar Ebenen, ſo daß ein von ihrer Spitze oder, wie der Kunſtausdruck dafür lautet, ihrem *Scheitel*

zu irgend einem Punkte der Kanten geſpannter Faden die Seitenflächen durchaus und gleichmäßig berührt.

159.

Iſt die Baſis einer Pyramide kreisförmig, ſo heißt der Körper ein Kegel. In dieſem werden alſo zur Baſis parallele Schnitte durchaus Kreiſe geben, die gegen den Scheitel hin immer kleinere und kleinere Halbmeſſer haben.

160.

Wie wir eben ein Prisma dadurch bildeten, daß wir gleiche und ähnliche Figuren über einander legten, ſo wird offenbar auch eine Pyramide entſtehen, wenn wir ähnliche aber immer kleiner und kleiner werdende Figuren über einander ſetzen. Unterſuchen wir nun, in welchem Verhältniſſe zu der Entfernung von der Baſis dieſe Figuren ſich verkleinern.

Ziehen wir zu dieſem Behufe in der Pyramide Fig. 113 die Linien ab, bc, cd, de und ae, und denken wir uns dieſelben als durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt erzeugt, ſo iſt offenbar ab parallel zu AB, bc parallel zu BC, u. ſ. f. Das Dreieck Pab iſt alſo ähnlich dem Dreiecke PAB, das Dreieck Pbc ähnlich dem Dreiecke PBC u. ſ. f. Mithin, wenn Pa die Hälfte von PA, ſo iſt auch ab die Hälfte von AB, bc die Hälfte von BC u. ſ. w. Befindet ſich alſo der Schnitt gerade in

der Mitte zwiſchen Scheitel und Baſis, ſo ſind die Seiten der Schnittfigur halb ſo groß als die Seiten der Baſis. Da aber die Flächeninhalte ähnlicher Figuren ſich verhalten, wie die Quadrate ihrer Seiten (81), ſo beträgt in dieſem Falle die Schnittfläche ein Viertheil der Grundfläche.

161.

Es ſind demnach in einer Pyramide die Seiten eines zur Baſis parallel geführten Schnittes in demſelben Verhältniſſe kleiner, als die Seiten der Baſis, in welchem die Diſtanz des Schnittes vom Scheitel kleiner iſt, als die Diſtanz der Baſis vom Scheitel.

Haben alſo zwei Pyramiden gleiche Baſis und gleiche Höhe, ſo ſind durch ſie in gleichen Diſtanzen von ihren Scheiteln geführte Schnitte ebenfalls gleich; denn beide Schnitte müſſen in demſelben Verhältniſſe kleiner ſeyn, als die beiden gleichen Baſen. Befinden ſich z. B. die Schnitte in beiden Pyramiden in der Mitte zwiſchen Baſis und Scheitel, ſo betragen die von denſelben gebildeten Figuren jede ein Viertheil der zugehörigen Baſen, und, da dieſe gleich ſind, ſo müſſen auch jene Figuren gleich ſeyn.

Ein ſehr wichtiger Satz, da er uns, wie wir gleich ſehen werden, lehrt, daß Pyramiden mit gleicher Baſis und Höhe gleichen körperlichen Inhalt haben.

162.

Eine Pyramide besteht nämlich, wie wir oben sagten, aus über einander liegenden immer kleiner werdenden ähnlichen Figuren. Denken wir uns nun zwei Platten von gleicher Dicke und gleichem Flächeninhalte, aber verschiedener Gestalt, z. B. die eine dreieckig, die andere viereckig, aber jede hundert Quadratzolle fassend, so werden, wenn wir auf diese Platten ähnlich gestaltete gleich dicke, aber stufenweise im Umfange abnehmende Platten legen, zwei Pyramiden entstehen, welche, wenn man auf beide gleich viele Platten legte, gleiche Höhen hätten, da die Höhe eben durch die Anzahl der gleich dicken Platten bestimmt wird, wenn man unter Höhe wieder eine vom Scheitel der Pyramide auf die Grundfläche gefällte Senkrechte versteht. Diese Pyramiden haben, wie wir sagten, dem Flächeninhalte nach gleiche Grundflächen; aus (161) folgt, daß auch die Platten, welche unmittelbar ober den Basen liegen, dem Flächenraume nach gleich sind, da dieser letzte nämlich im Verhältnisse der Entfernungen von der Basis, welche hier in beiden Pyramiden dieselben sind, abnimmt. Dasselbe gilt von dem nächsten Plattenpaare u. s. w.

Da somit beide Pyramiden aus gleich vielen Platten bestehen, die paarweise einander gleich sind, so haben beide Pyramiden gleichen körperlichen Inhalt.

Zwar ſcheint bei dieſer Beweisart, als wenn die Seiten der Pyramiden keine Ebenen, ſondern ſtaffelartig eingeſchnittene Flächen, und die Scheitel derſelben keine Spitzen, ſondern kleine Ebenen ſeyn müßten; allein, da die hier befolgte Schlußweiſe für jede Anzahl und Dicke der Platten gilt, ſo hindert uns nichts, dieſelben ſo dünn und ihre Anzahl ſo bedeutend zu machen, als wir nur immer wollen, ſo daß jene Unebenheiten der Seiten endlich ganz verſchwinden, und die Scheitel von vollkommenen Spitzen nicht mehr zu unterſcheiden ſeyn werden.

Pyramiden von gleicher Höhe und gleicher Baſis haben alſo gleichen körperlichen Inhalt, mögen ſie auch ſonſt noch ſo verſchieden geſtaltet ſeyn.

163.

Wir haben in Fig. 114 ein gerades Prisma verzeichnet, deſſen Baſis ein gleichſeitiges Dreieck ABC iſt; die drei ſenkrechten Seiten des Prisma ſind unter einander gleiche Rechtecke.

Ziehen wir in der Seitenfläche ABba die Diagonale aB, und in der Fläche bBCc die Diagonale cB. Führt man nun einen Schnitt durch das Prisma im Punkte B längs der beiden eben gezogenen Diagonalen, ſo ſchneidet man dadurch eine dreiſeitige Pyramide ab, deren Baſis cBb die Hälfte einer rechtwinkligen Seite des Prisma, und deren Höhe der Senkrechten von a auf cb, oder von A auf CB gleich iſt. Zieht man ebenſo in der

dritten rechtwinkligen Seite des Prisma die Diagonale aC, so kann man wieder eine dreiseitige Pyramide erhalten, indem man durch das Prisma einen Schnitt in den Punkten a, C und B führt. Diese Pyramide wird, wie die frühere, die Hälfte aBA einer rechtwinkligen Seite des Prisma zur Basis, und zur Höhe die Senkrechte von C auf AB haben, die der früher betrachteten Senkrechten von A auf CB gleich ist. Die beiden abgeschnittenen Pyramiden haben daher gleiche Basen und gleiche Höhen, und folglich gleichen körperlichen Inhalt.

Bei diesem Verfahren blieb jedoch von dem Prisma ein Stück über, welches selbst eine dreiseitige Pyramide ist, die die Hälfte cCB einer rechtwinkligen Seite cbBC des Prisma zur Basis, und die Senkrechte von a auf cb oder von A auf CB zur Höhe hat, und die folglich beiden früheren Pyramiden wieder gleich ist.

Das Prisma hat also einen dreimal größeren körperlichen Inhalt, als eine dieser gleichen Pyramiden, da dasselbe alle drei umfaßt.

164.

Betrachtet man ABC als die Basis der Pyramide, deren Scheitel in a ist, so hat dieselbe mit dem Prisma gleiche Basis und Höhe; der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist daher stets dem dritten Theile des körperlichen Inhaltes eines dreiseitigen Prisma gleich, welches mit der Pyramide gleiche Basis und Höhe hat.

Allein dieser Satz gilt allgemeinen, nicht bloß für dreiseitige Prismen und Pyramiden; denn, wie wir in (154) zeigten, sind Prismen von gleicher Höhe und Basis gleich, welches auch ihre Gestalt sey, folglich ist auch ein dreiseitiges Prisma jedem anderen, mehrseitigen Prisma gleich, wofern es nur mit diesem gleiche Höhe und gleiche Basis hat. Ferner ist auch eine dreiseitige Pyramide, wie wir aus (162) wissen, jeder mehrseitigen oder sonst irgend anders gestalteten an Körperinhalt gleich, wofern nur beide Pyramiden gleiche Basis und Höhe haben. Was also von einer Gattung Prismen oder Pyramiden in Bezug auf ihren Körperinhalt erwiesen ist, gilt auch von jeder anderen Gattung dieser Körper, und wir haben allgemein den Satz:

Wenn ein Prisma mit einer Pyramide gleiche Basis und Höhe hat, mögen beide wie immer gestaltet seyn, so ist der körperliche Inhalt der Pyramide dem dritten Theile des körperlichen Inhaltes des Prisma gleich.

165.

Daraus ergibt sich aber nun folgende höchst einfache Regel für die Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Pyramide: Man multiplicire die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. der Höhe mit der Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w. der Basis, und dividire das Produkt durch 3; der Quotient ist der gesuchte körperliche Inhalt der Pyramide. Das

ecke, die durchaus gleiche Höhe, und die Seiten der Grundfläche des Prisma zu Baſen haben. Der Flächeninhalt eines ſolchen Rechteckes wird daher dem Produkte der gemeinſchaftlichen Höhe in die zugehörige Seite der Grundfigur gleich ſeyn. Der Flächeninhalt ſämmtlicher ſenkrechter Seiten des Prisma wird alſo gleich ſeyn dem Produkte der Höhe deſſelben in die Summe der Seiten der Grundfigur (wo man zwiſchen Seiten eines Kölpers und einer Figur wohl zu unterſcheiden hat. Jene ſind Flächen, dieſe Linien). Wenn z. B. die Höhe 10 Zolle, und die Seiten der Grundfigur der Reihe nach 2, 3, 4, 5, 7 und 9 Zolle betrügen, ſo wären die ſenkrechten Seiten des Prisma ſechs Rechtecke mit gemeinſchaftlicher Höhe von 10 Zollen, und Baſen von 2, 3, 4, 5, 7 und 9 Zolle; dieſe Rechtecke zuſammen hätten aber genau denſelben Flächeninhalt, wie ein Rechteck, deſſen Höhe ebenfalls 10 Zolle, und deſſen Baſis 30 Zolle, nämlich die Summe der Baſen jener ſechs Rechtecke betrüge, ſo daß wir den Flächeninhalt der ſenkrechten Seiten des Prisma gleich 300 Quadratzollen, d. h. dem Produkte der Höhe von 10 Zollen in den ganzen Umfang der Grundfigur des Prisma von 30 Zollen finden.

Dieß Verfahren wird noch erſichtlicher, wenn man ſich einen Streifen Papier um das Prisma ſo gelegt denkt, daß er nirgend vorſpringt oder doppelt liegt, und nur eben die ſenkrechten Seiten des Prisma deckt. Nimmt man dieß Papier dann weg,

und breitet man es aus, so muß es offenbar die Gestalt eines Rechteckes haben, dessen Höhe 10 und dessen Basis 30 Zolle beträgt.

169.

Dasselbe muß auch von einem Cylinder gelten, und auch hier muß, wenn man einen Streifen Papier, der ihn nur eben genau deckte, aufrollt, derselbe ein Rechteck bilden, dessen Höhe die Höhe des Cylinders, und dessen Basis der Umfang des Kreises ist, der dem Cylinder zur Grundfläche dient.

Man findet also die Oberfläche von Prismen und Cylindern, indem man ihre Höhe mit dem Umfange ihrer Grundfläche multiplicirt, wobei aber unter Oberfläche bloß die senkrechten Begrenzungen der Körper gemeint sind; den Flächeninhalt der Basis und der ihr gegenüber liegenden, obersten Seite des Körpers wird man, wenn es nöthig seyn sollte, auf die bei ebenen Figuren gewöhnliche Art für sich bestimmen müssen.

Um also z. B. zu finden, wie viele Ellen Leinwand man braucht, um die senkrechten Wände eines Zimmers zu verkleiden, welches fünf Ellen hoch, und von dessen Fußboden jede Seite 22 Ellen mißt, wird man nur diese beiden Zahlen mit einander zu multipliciren haben, um sofort die Zahl 110 für die gesuchte Anzahl Ellen Leinwand zu erhalten.

170.

Unter regelmäßiger Pyramide versteht man eine Pyramide, die ein regelmäßiges Polygon (132) zur Basis, und durchaus gleich lange Kanten hat. Sey Fig. 118 eine solche Pyramide, so sind die Dreiecke, welche die Seiten desselben bilden, alle unter einander congruent, und folglich die Oberfläche einer regulären Pyramide (das Wort „Oberfläche“ wieder wie oben nicht auf die Grundfläche bezogen) gleich dem Produkte der gemeinschaftlichen Höhe dieser Dreiecke in die Summe ihrer Basen oder in den Umfang der Grundfläche der Pyramide. Denkt man sich, wie oben, einen Streifen Papier um eine solche Pyramide gelegt, so wird derselbe, wenn man ihn abnehmen, und dort, wo er die Grundfläche berührte, in eine gerade Linie legen wollte, eine der Fig. 81 ähnliche Gestalt zeigen, da man nämlich, um dieß thun zu können, den Streifen Papier dort, wo er die Kanten der Pyramide berührte, wird zerschneiden müssen.

171.

Legt man einen Streifen Papier um einen Kegel, so daß er ihn nur eben bedeckt, und rollt man dasselbe dann auf, so zeigt es sich als einen der Fig. 119 ähnlichen Theil eines Kreises, der von einem Bogen und zwei Halbmessern eingeschlossen wird. Aus der eben in (170) angestellten Betrach-

tung folgt aber, daß der Flächeninhalt dieſer Figur gefunden wird, indem man den Halbmeſſer des Kreiſes, dem ſie angehört, mit dem halben Bogen multiplicirt; denn theilt man den Winkel C in eine Menge kleiner Winkel, ſo entſtehen eben ſo viele ſchmale Dreiecke, die, wenn man den Bogen der Fig. 118 in eine gerade Linie legt, wieder die Geſtalt der Figur 81 annehmen.

Die Oberfläche eines Kegels (ohne Grundfläche) iſt alſo gleich dem halben Produkte der Diſtanz ſeiner Baſis vom Scheitel (auf der Oberfläche des Kegels genommen) mit dem Umfange der Baſis.

172.

Geſetzt, man hätte eine Anzahl Kubikzolle, und wollte damit einen Kubus bilden, deſſen Kanten durchaus zwei Zolle lang ſind. Da die Seiten eines Kubus Quadrate ſind, ſo müſſen die Seiten eines ſolchen Kubus vier Quadratzolle enthalten, und ſomit zur Bildung einer ſolchen Seite vier Kubikzolle verwendet werden. Legen wir alſo zuerſt vier ſolcher Kubikzolle zuſammen, ſo entſteht ein rechtwinkliges Parallelopiped, das zur Baſis (Fig. 120) ein Quadrat der gewünſchten Größe hat: aber deſſen Höhe beträgt nur einen Zoll. Um alſo auch die Höhe des Körpers auf zwei Zolle zu bringen, wird man eine zweite Schichte von Kubikzollen, der erſten ganz gleich, auf dieſe ſetzen, und ſo einen Körper

erhalten, wie ihn Fig. 120 darstellt, nämlich in der That einen Kubus, dessen Kanten durchaus zwei Zolle messen. Wir brauchten aber zur Bildung eines solchen Würfels acht Kubikzolle.

Wie vieler Kubikzolle würde man nun bedürfen, um einen Würfel zu bilden, dessen Kanten durchaus drei Zolle messen?

Die Basis dieses Würfels, wie überhaupt jede seiner Seiten wird offenbar neun Quadratzolle enthalten, und folglich werden, um dieselbe herzustellen, neun Kubikzolle nöthig seyn. Da aber der Würfel auch drei Zolle hoch seyn soll, so wird man offenbar drei solche Lagen von neun Kubikzollen über einander setzen müssen, um den gewünschten Körper zu erhalten. Zu einem Würfel, dessen Kanten drei Zolle messen, braucht man also dreimal neun, oder sieben und zwanzig Kubikzolle.

Und ebenso wird man nun für jeden beliebigen Würfel verfahren, wenn man wissen will, wie viele Kubikzolle er enthält. Multiplicirt man die Anzahl Zolle, welche eine Kante messen soll, mit sich selbst, so hat man die Anzahl Quadratzolle der Basis, oder, was dasselbe ist, die Anzahl Kubikzolle der untersten Schichte. Die Höhe aber, welche einer Kante des Würfels gleich kommt, gibt die Anzahl solcher Schichten, welche erfordert wird, um den fraglichen Körper zu bilden.

173.

Wenn man die Kanten eines Würfels verdoppelt, verdreifacht u. s. f., so wird der körperliche Inhalt desselben in einem viel stärkeren Verhältnisse vergrößert. Um die Zunahme des körperlichen Inhaltes zu finden, wird man, wie aus (172) hervorgeht, die Zunahme einer Kante des Würfels zweimal mit sich selbst multipliciren. Hat man also z. B. die Kanten auf das zehnfache gebracht, so ist der körperliche Inhalt 1000 mal größer geworden, denn 10 gibt mit sich selbst multiplicirt 100, und dieß wieder 10 mal genommen die Zahl 1000.

Und dieß ist der Grund, weßhalb man in der Arithmetik eine Zahl, die durch das zweimalige Multipliciren einer anderen Zahl mit sich selbst entstand, auch den Würfel oder Kubus dieser anderen Zahl nennt, während die eigentliche Bezeichnung dritte Potenz lautet.

174.

Was wir hier von Würfeln nachwiesen, wird allgemein von allen ähnlichen Körpern gelten, da sie gleich großen Kuben proportionirt sind. Zwei ähnliche Prismen z. B, in denen die gleichliegenden Kanten sich wie 1 zu 2 verhalten, werden, wenn man sie in Würfelform bringt, Kanten erhalten, die sich ebenfalls wie 1 zu 2 verhalten, und folglich ihre körperlichen Inhalte sich wie 1 zu 8 verhalten.

Die körperlichen Inhalte unter einander ähnlicher Körper stehen daher immer in demselben Verhältnisse, wie die dritten Potenzen ihrer gleichliegenden Kanten.

175.

Endlich werden die Oberflächen ähnlicher Körper sich stets wie die zweiten Potenzen der gleichliegenden Kanten verhalten, weil diese Oberflächen immer von unter einander ähnlichen ebenen Figuren gebildet werden, für deren jede obiger Satz gilt, und weil diese Figuren auf jedem der betrachteten Körper ähnlich angeordnet sind.

Neunzehnter Abschnitt.

Kugel. — Erzeugt durch die Drehung eines Kreises. — Schnitt einer Kugel. — Einer Kugel umschriebener Cylinder. — Verhältniß ihrer Größe. — Oberfläche der Kugel, verglichen mit der des Cylinders. — Mit dem Flächeninhalte eines größten Kreises der Kugel. — Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Kugel. — Oberflächen und Körperinhalte verschiedener Kugeln, nicht ihren Durchmessern proportional.

176.

Einer der merkwürdigsten und zugleich nützlichsten Körper, die man in der Geometrie betrachtet,

iſt die Kugel oder Sphäre, ein runder Körper, deſſen Oberfläche durchaus gleichmäßig geſtaltet, und der unter den Körpern gerade das iſt, was unter den ebenen Figuren der Kreis, ſo daß auch deſſen geometriſche Erklärung ſehr ähnlich der Definition dieſes letzten lautet:

Die Kugel iſt nämlich ein Körper, deſſen Oberfläche von einem gewiſſen Punkte innerhalb deſſelben durchaus gleich weit abſteht. Dieſen Punkt aber nennt man den Mittelpunkt der Kugel.

177.

Wenn man ſich eine gewöhnliche Münze auf zwei Punkten ihres Umfanges, die einander genau gegenüber liegen, von zwei Nadeln gehalten denkt, ſo kann man die Münze leicht in eine ſehr ſchnelle drehende Bewegung verſetzen. Während dieſer Bewegung glaubt man eine Kugel vor ſich zu ſehen, und in der That wird die Kugel auch oft als ein Körper definirt, der durch die Drehung eines Kreiſes um einen ſeiner Durchmeſſer entſteht. Es wird nämlich dieſer Durchmeſſer in unſerem Beiſpiele die Linie ſeyn, welche die Spitzen der beiden Nadeln verbindet.

178.

Iſt alſo Figur 121 ein Kreis AQBQ', und denkt man ſich denſelben z. B. um den Durchmeſſer AB ſich drehend, ſo wird der Umfang dieſes Kreiſes

bei dieser Drehung eine Fläche beschreiben, die die Gestalt einer Kugel hat; denn da jeder Punkt des Umfanges vom Kreise AQBQ' von dessen Mittelpunkte C gleich weit absteht, so muß auch jeder Punkt in der durch die Drehung des Kreises beschriebenen Fläche von demselben Punkte gleich weit entfernt seyn. Es ist folglich nach der in (176) gegebenen Erklärung die beschriebene Fläche wirklich eine Kugel, und der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Mittelpunkt derselben.

179.

Ziehen wir in Fig. 121 mehrere gerade Linien senkrecht auf den Durchmesser AB. Solche Linien werden nach (121) alle vom Durchmesser AB halbirt. Betrachten wir nun irgend eine derselben, z. B. die Linie PP' näher, so finden wir, daß bei der Drehung des Kreises die Endpunkte P und P' derselben offenbar einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in M ist, da dieser Punkt durchaus von P und P' gleich weit absteht, mögen P und P' durch die Drehung in was immer für eine Lage versetzt seyn.

Denkt man sich nun die Kugel durch eine Ebene geschnitten, die durch den Punkt M geht, und senkrecht auf AB steht, so wird dieser Schnitt auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis bilden, dessen Mittelpunkt M, und dessen Halbmesser MP ist, und es ist dieser Kreis derjenige, welchen die Punkte P und P' bei der Drehung des Kreises AQBQ' beschreiben. Da aber der Durchmesser AB ganz

willkührlich ist, und man den Kreis AQBQ' ebenso gut um irgend einen anderen Durchmesser hätte drehen lassen können, ohne deßwegen eine andere Kugel zu erhalten, so folgt daraus, daß eine Kugel in jeder Richtung durch eine Ebene geschnitten einen Kreis gebe.

Diese Schnitte werden jedoch Kreise von verschiedener Größe geben, und desto größer werden, je näher die schneidende Ebene am Mittelpunkte steht, so wie bei der Drehung des Kreises AQBQ' die verschiedenen Punkte seines Umfanges Kreise von verschiedener Größe, und desto größere bilden, je näher jene Punkte dem Durchmesser QQ' kommen. Ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel gibt den grösten Kreis, den man auf der Oberfläche derselben ziehen kann; jeden anderen Kreis, dessen Mittelpunkt nicht in dem der Kugel liegt, nennt man einen kleineren Kreis.

Der Durchmesser AB in Fig. 121 geht durch alle Mittelpunkte der auf demselben senkrechten Kreise, und daraus folgt von selbst, daß, wenn der Durchmesser einer Kugel durch die Mittelpunkte einer Reihe von Schnitten geht, er auf allen diesen Schnitten senkrecht steht.

180.

Wir haben in Fig. 122 eine Kugel, und um dieselbe herum einen Cylinder verzeichnet, dessen Seiten die Kugel ringsum berühren, was wir hier

durch die Linie ABD anzuzeigen ſuchten. Die obere und untere Endfläche des Cylinders berühren die Kugel in einem einzigen Punkte. Man ſagt von einem ſolchen Cylinder, daß er der Kugel umſchrieben ſey.

Wir können uns einen klaren Begriff von der Anordnung dieſer beiden Körper auch auf folgende Weiſe verſchaffen. Fig. 123 ſtellt uns einen Kreis mit einem umſchriebenen Quadrate vor. Denken wir uns dieſe Figur, wie ſie iſt, alſo Kreis und Quadrat zuſammen um den Durchmeſſer AB ſich drehend, ſo werden offenbar Kreis und Quadrat verſchiedene Flächen beſchreiben, und zwar wird jener eine Kugel und dieſes einen Cylinder bilden; die Linien GH und IK werden bei dieſer Drehung die krumme Oberfläche, uud die Linien GI und HK die, den Cylinder oben und unten begrenzenden Ebenen bilden, und es wird der Cylinder offenbar die Kugel in der Linie AB und der auf AB ſenkrechten, durch EF gehenden Ebene berühren, d. h. der Kugel umſchrieben ſeyn.

181.

Denken wir uns zwei Linien LN und OQ ſehr nahe an einander gezogen, beide ſenkrecht ſtehend auf AB. Dieſe beiden Linien erſcheinen in der Figur als bloße Linien, ſtellen aber eigentlich zwei auf AB ſenkrechte Ebenen vor, die zwiſchen ſich einen gewiſſen Theil von Kugel ſowohl, als Cylinder ent-

halten. Dieſelben ſchneiden auf der Oberfläche des Cylinders einen bandförmigen Streifen aus, deſſen Höhe oder Breite OL iſt, und der ſich um den ganzen Cylinder herum erſtreckt. Auf der Kugel wird von denſelben Ebenen ein anderer Streifen umſchloſſen, deſſen Breite RS iſt, und der ſich ebenfalls um die ganze Kugel erſtreckt. Da OL ſenkrecht auf beiden Ebenen ſteht, ſo iſt OL kürzer, als RS, das ſchief gegen dieſelben ſteht, ſo daß der Streifen auf dem Cylinder ſchmäler iſt, als der auf der Kugel. Andererſeits iſt jener Streifen länger als dieſer, weil jener auf dem Cylinder ſich längs eines Kreiſes erſtreckt, deſſen Halbmeſſer LM iſt, während dieſer auf der Kugel längs eines Kreiſes liegt, deſſen Halbmeſſer SM iſt.

Die Längen dieſer ringförmigen Streifen werden zu einander im Verhältniſſe der Halbmeſſer LM und SM ſtehen, da nach (101) die Peripherie verſchiedener Kreiſe ſich ſtets wie ihre Halbmeſſer verhalten. Wir wollen nun überdieß zeigen, daß RS in demſelben Maaße größer als OL iſt, in welchem LM größer iſt als SM.

Ziehen wir zu dieſem Behufe die Linien SC zum Mittelpunkte, und ST parallel zu LO. Das kleine Dreieck STR hat mit dem größeren SMC gleiche Winkel; denn die Winkel in T und M ſind Rechte, ferner ſteht CS im Punkte S ſenkrecht auf dem Kreiſe, und MS ſenkrecht auf ST; CSR und MST ſind folglich rechte Winkel; nimmt man von beiden den Winkel MSR weg, ſo bleiben wieder

gleiche Winkel übrig; es ſind folglich auch die Winkel CSM und TSR gleich. Demnach haben wir zwei Winkel des einen Dreiecks als zweien Winkeln des anderen Dreiecks gleich nachgewieſen; es ſind alſo nach (48) auch die dritten Winkel TRS und SCM einander gleich. Die beiden Dreiecke STR und SCM ſind daher einander ähnlich, und es verhält ſich SR zu ST, wie SC zu SM. Die Linie ST aber iſt gleich der Linie LO, da beide entgegengeſetzte Seiten eines Parallelograms ſind (57); und SC iſt gleich EC, da beide Halbmeſſer deſſelben Kreiſes ſind (93); EC aber iſt wieder gleich LM, da beide einander gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrames ſind; folglich iſt LM gleich SC.

Demnach iſt SR wirklich in demſelben Maaße größer als LO, in welchem LM größer iſt, als SM. Jene Linien aber ſind die Breiten und dieſe den Längen der ringförmigen Streifen auf Kugel und Cylinder proportionirt; folglich will das eben ausgeſprochene Verhältniß eigentlich ſagen: gerade ſo vielmal als der Streifen auf der Kugel breiter iſt, iſt der Streifen auf dem Cylinder länger, und ſomit ſind die Oberflächen beider Streifen einander gleich.

Zieht man nun mehrere ſolche unter einander parallele Linien, wie LN und OQ, ſo wird die Oberfläche des Cylinders und der Kugel in eine Anzahl Streifen getheilt, die paarweiſe unter einander gleich ſind, und wir ſchließen demnach daraus folgenden höchſt merkwürdigen Satz:

182.

Die Oberfläche einer Kugel ist der krummen Oberfläche eines, derselben umschriebenen Cylinders gleich.

183.

Wir fanden in (169), daß die krumme Oberfläche eines Cylinders dem Rechtecke über dessen Höhe und dem Umfange seiner kreisförmigen Basis gleich ist. Im gegenwärtigen Falle ist die Höhe des Cylinders der Durchmesser der einbeschriebenen Kugel, und die Basis des Cylinders ein größter Kreis (179) derselben Kugel. Die krumme Oberfläche eines Cylinders ist folglich dem Rechtecke über dem Durchmesser und dem Umfang eines größten Kreises der einbeschriebenen Kugel, oder, was dasselbe ist, dem doppelten Rechtecke über dem Halbmesser und dem Umfange eines größten Kreises der einbeschriebenen Kugel gleich.

Das Rechteck über dem Halbmesser und dem Umfange eines Kreises aber ist nach (110) gleich dem doppelten Flächeninhalt des Kreises, und somit die krumme Oberfläche eines Cylinders dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises der einbeschriebenen Kugel gleich.

Da aber nach (182) Cylinder und einbeschrieschriebene Kugel gleiche Oberflächen haben, so haben wir folgenden wichtigen Lehrsatz:

184.

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, aus dem Durchmesser einer Kugel ihre Oberfläche zu finden. Man wird nämlich zuerst nach (111) das Quadrat des Durchmessers durch 14 dividiren und den Quotienten mit 11 multipliciren, um sofort die Fläche eines größten Kreises der Kugel zu erhalten, welche mit 4 multiplicirt, die Oberfläche der ganzen Kugel gibt.

So beträgt der Durchmesser unserer Erde nahe 1719 deutsche Meilen. Das Quadrat dieser Zahl ist 2954961; diese Zahl durch 14 getheilt gibt 211068, welche Zahl 11 mal genommen gleich 2321748, und dieß ist die Anzahl Quadratmeilen, welche ein größter Kreis unserer Erde enthält; dieselbe vierfach genommen gibt 9286992 Quadratmeilen für die gesuchte Oberfläche der ganzen Erde.

185.

Da wir hier dieselbe Zahl durch 14 dividiren, und dann durch 11 und 4 oder durch 44 multipliciren, so wird es kürzer seyn, die Hälfte von 14 und 44 zu nehmen, und das **Quadrat des Durchmessers durch 7 zu theilen und mit 22 zu multipliciren**, wo man offenbar dasselbe Resultat

erhält. Man ſieht, daß dieſe Regel für die Beſtimmung der Oberfläche einer Kugel eine merkwürdige Aehnlichkeit mit der oben für die Fläche eines Kreiſes gegebenen hat, indem ſich beide nur dadurch unterſcheiden, daß hier das Quadrat des Durchmeſſers, und dort der Durchmeſſer ſelbſt vorkommt, ein Umſtand, auf deſſen Erklärung wir aber hier nicht weiter eingehen können.

186.

Nun wird es ein Leichtes ſeyn, auch für die Beſtimmung des körperlichen Inhaltes einer Kugel aus ihrem Halbmeſſer eine allgemeine Regel zu finden. Als wir oben (110) eine ſolche für den Flächeninhalt eines Kreiſes ſuchten, dachten wir uns den Umfang deſſelben in viele Theile getheilt, und über jeden ſolchen Theil durch zu den Endpunkten deſſelben gezogene Halbmeſſer Dreiecke conſtruirt. Auf ähnliche Weiſe wollen wir uns jetzt die Oberfläche einer Kugel in eine Menge ſo kleiner Theile getheilt denken, daß ein einzelner ſolcher Theil keine merkliche Krümmung mehr zeigt, und als eine Ebene betrachtet werden kann; zieht man dann aus dem Mittelpunkte der Kugel zu jenen Theilen ihrer Oberfläche Halbmeſſer, ſo wird die Kugel ſelbſt in eine Menge kleiner Pyramiden getheilt, die ihre Scheitel ſämmtlich im Mittelpunkte, und jene Theile der Oberflächen zu Grundflächen haben. Der Körperinhalt einer Pyramide aber iſt nach (165) dem Dritt-

theile des Produktes von Basis und Höhe gleich. Man müßte also, um den körperlichen Inhalt der Kugel zu finden, diese kleine Rechnung mit jeder Pyramide machen; die Summe der Körperinhalte sämmtlicher Pyramiden wäre dem körperlichen Inhalte der Kugel gleich. Einfacher aber wird man verfahren, wenn man mit einem Male die Summe aller Grundflächen der Pyramiden, d. h. die Oberfläche der ganzen Kugel mit der gemeinschaftlichen Höhe jener Pyramiden, d. h. mit dem Halbmesser der Kugel multiplicirt, und das Produkt durch 3 theilt. Wir wissen aber, daß die Oberfläche der Kugel gleich ist dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben, und somit haben wir folgende Regel:

Um den körperlichen Inhalt einer Kugel zu erhalten, muß man die vierfache Fläche eines größten Kreises derselben mit dem Halbmesser multipliciren, und das Produkt durch 3 theilen.

Allein diese Regel kann für den Gebrauch noch viel einfacher gestellt werden. In (185) fanden wir, daß die Oberfläche einer Kugel bestimmt wird, indem man das Quadrat des Durchmessers durch 7 theilt, und den Quotienten durch 22 multiplicirt; nun müßten wir die so erhaltene Zahl mit dem halben Durchmesser multipliciren, und durch 3 dividiren, oder, was dasselbe ist, mit dem ganzen Durchmesser multipliciren und durch 6 theilen. Die

ganze Operation zur Auffindung des körperlichen Inhaltes einer Kugel iſt alſo jetzt folgende: das Quadrat des Durchmeſſers iſt zu multipliciren mit dem Durchmeſſer und mit der Zahl 22, und das Produkt zu theilen durch die Zahlen 7 und 6. Das Quadrat des Durchmeſſers, multiplicirt mit dem Durchmeſſer, iſt eben ſo viel als die dritte Potenz oder der Kubus des Durchmeſſers; es iſt alſo der Kubus des Durchmeſſers mit 22 zu multipliciren, und das Produkt durch 6 mal 7 oder 42 zu theilen, oder, was offenbar daſſelbe iſt, durch 11 zu multipliciren und 21 zu theilen. Um demnach den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden, wird man den Kubus des Durchmeſſers mit 11 multipliciren und durch 21 theilen.

187.

Da alle Kugeln offenbar unter einander ähnliche Körper ſind, ſo wird auch von ihnen gelten, was wir oben von ähnlichen Körpern überhaupt ſagten, und die Oberflächen verſchiedener Kugeln werden ſich wie die Quadrate (zweiten Potenzen) ihrer Durchmeſſer, und ihre körperlichen Inhalte wie die Würfel (dritten Potenzen) der Durchmeſſer verhalten.

Zwanzigſter Abſchnitt.

Axen und Pole eines größten Kreiſes der Kugel. — Wie ein größter Kreis die Kugel, und wie zwei größte Kreiſe ſich unter einander theilen. — Neigung der Ebenen zweier größter Kreiſe derſelben Kugel. — Sie kann auf dreierlei Art gemeſſen werden. — Größte Kreiſe, die durch die Pole eines anderen größren Kreiſes gehen.

188.

Führen wir durch den Mittelpunkt C einer Kugel Fig. 124 einen Schnitt, ſo wird nach (179) der Kreis AB, welchen wir auf der Oberfläche der Kugel erzeugen, ein größter Kreis ſeyn. Eine auf die Ebene dieſes größten Kreiſes ſenkrechte Linie DE, welche durch den Mittelpunkt C geht, und alſo ein Durchmeſſer der Kugel iſt, heißt die Axe des größten Kreiſes AB, und die Punkte D und E, wo die Axe die Oberfläche der Kugel durchſchneidet, nennt man die Pole jenes Kreiſes. Die Axe eines größten Kreiſes geht daher immer durch den Mittelpunkt der Kugel; jeder größte Kreis hat zwei Pole, und jeder Pol iſt von allen Punkten der Peripherie ſeines Kreiſes um 90 Grade oder um einen rechten Winkel entfernt.

189.

Jeder größte Kreis theilt, wie man von ſelbſt ſieht, die Kugel in zwei gleich große Theile, er halbirt ſie. In der Mitte der Oberfläche dieſer Theile

der Kugel liegen die Pole des betrachteten größten Kreiſes.

190.

Da größte Kreiſe ihren Mittelpunkt ſtets im Mittelpunkte der Kugel haben, ſo müſſen zwei größte Kreiſe ſich in einer geraden Linie durchſchneiden, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, d. h. ein Durchmeſſer der Kugel iſt aber zugleich ein Durchmeſſer der beiden größten Kreiſe, die, wie alle größten Kreiſe einer und derſelben Kugel, von gleichem Umfange ſind. Zwei größte Kreiſe einer Kugel durchſchneiden ſich alſo immer in einem und demſelben, beiden Kreiſen gemeinſchaftlichen Durchmeſſer, mit anderen Worten, zwei größte Kreiſe einer Kugel halbiren ſich gegenſeitig.

Sind z. B. Fig. 125 AB und DE zwei größte Kreiſe der Kugel ADBE, ſo durchſchneiden ſich ihre Ebenen in dem beiden Kreiſen gemeinſchaftlichen Durchmeſſer FG, der zugleich ein Durchmeſſer der Kugel iſt, da er durch den Mittelpunkt C derſelben geht, und die durch dieſen Durchſchnitt der beiden Kreiſe entſtandenen Kreisabſchnitte AFG, FGB, DFG und FGE ſind als halbe Peripherien deſſelben Kreiſes einander durchaus gleich.

191.

Den Winkel, unter welchem die Ebenen zweier größten Kreiſe einer Kugel ſich treffen, nennt man die *Neigung* dieſer Ebenen gegen einander. Sie

iſt offenbar dem Winkel AGD oder DFA gleich, unter welchem die Peripherieen der beiden Kreiſe in ihren Durchſchnittspunkten G oder F einander begegnen.

192.

Denkt man ſich die Axen IK und LM der beiden größten Kreiſe, ſo werden, wie man von ſelbſt ſieht, dieſe Axen einen Winkel ICM unter einander machen, welcher dem Neigungswinkel der beiden größten Kreiſe gleich iſt.

Um ſich hiervon völlig zu überzeugen, wird man nur bedenken dürfen, daß, wenn die beiden Kreiſe zuſammenfielen, ihre Neigung gegen einander alſo null wäre, auch die beiden Axen zuſammenfallen würden, und der Winkel zwiſchen dieſen Axen ſich in demſelben Maaße vergrößern würde, in welchem man die Ebenen der beiden größten Kreiſe aus einander rückte, daß alſo der Winkel zwiſchen dieſen Ebenen und der Winkel jener Axen wirklich ſtets gleich groß ſind. Der Winkel, welchen die beiden Axen unter einander bilden, wird aber, da er am Mittelpunkte C der Kugel oder auch des größten Kreiſes AIMBKL liegt, durch Bogen dieſes Kreiſes gemeſſen. Die Punkte I, M, L, K ſind ferner nach (188) die Pole der beiden größten Kreiſe AB und DE. Es wird alſo die Neigung zweier größter Kreiſe einer Kugel gegen einander auch durch die Bogen IM und LK eines größten

Kreises gemessen, welcher durch die Pole jener Kreise geht.

193.

Nach (188) ist AI sowohl, als DM ein Bogen von 90°; nimmt man von beiden denselben Bogen DI weg, so bleiben offenbar wieder unter einander gleiche Bogen IM und AD über. Die Neigung der Ebenen zweier größter Kreise einer Kugel werden also drittens auch durch jenen Bogen AD des durch ihre Pole gehenden größten Kreises AIMBKL gemessen, welchen die beiden größten Kreise selbst einschließen.

194.

Vergrößert man allmählich die Neigung der Ebene des größten Kreises DE gegen die Ebene des größten Kreises AB, so wird auch der zwischen ihren Polen liegende, und jene Neigung nach (192) messende Bogen IM immer größer; geht endlich der Kreis DE durch die Axe IK oder, was dasselbe, durch die Pole I und K des Kreises AB, so fällt die Axe LM des Kreises DE offenbar in die Ebene des Kreises AB. Der zwischen den Polen der beiden größten Kreise liegende Bogen oder (192) die Neigung der beiden größten Kreise ist dann gleich dem Bogen MD oder IB, d. h. (188) die Neigung beider Kreise gegen einander beträgt 90° oder die beiden Kreise stehen auf einander senkrecht.

Geht also ein größter Kreis durch die Pole eines anderen größten Kreises derselben Kugel, so stehen die Ebenen derselben auf einander senkrecht.

195.

Hieraus erhellt nun aber auch der umgekehrte Satz von selbst, nämlich: Stehen die Ebenen zweier größten Kreise einer Kugel auf einander senkrecht, so geht ein größter Kreis stets durch die Pole des anderen größten Kreises.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erſter Abſchnitt.

Natur der geraden Linie. — Unterſchied zwiſchen geraden und krummen Linien. — Geometriſche Figuren. — Winkel. — Spitzer und ſtumpfer Winkel. — Rechter Winkel 5

Zweiter Abſchnitt.

Dreieck. — Seiten und Winkel deſſelben. — Gleichheit von Dreiecken. — Bedingungen dafür. — Unterſchied zwiſchen Dreiecken und anderen Figuren. — Gleichwinklige Dreiecke ſind ähnlich. — Gleichſeitige Dreiecke. — Gleiche Seiten bringen gleiche Winkel, ungleiche Seiten ungleiche Winkel mit ſich. — Ein Quadrat zu verzeichnen. — Gleichſeitiges Dreieck 10

Seite

Dritter Abſchnitt.

Parallele Linien. — Sie ſchneiden ſich nie. — Stehen überall gleichweit von einander ab. — Sind gleich geneigt gegen Linien, die ſie ſchneiden. — Stehen ſenkrecht auf dieſelbe Linie. — Eine Parallele zu ziehen 19

Vierter Abſchnitt.

Aenderungen der Winkel eines Dreiecks, wenn deſſen Seiten ſich ändern. — Einer wächst, wenn der andere abnimmt. — Ihre Summe iſt immer dieſelbe, und ſtets gleich zwei Rechten. — Eine vierſeitige Figur. — Ihre Zerfällung in Dreiecke. — Die Summe ihrer Winkel immer dieſelbe, und ſtets gleich vier Rechten. — Derſelbe Schluß auf eine fünfſeitige Figur ausgedehnt. — Auf alle Figuren. — Beweisart für die Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke. — Größe der Winkel eines gleichſeitigen Dreiecks. — Eines rechtwinkligen Dreiecks 23

Fünfter Abſchnitt.

Abhängigkeit der Größe der Seite eines Dreiecks von der Größe des gegenüberliegenden Winkels. — Grenzen der Summe und Differenz zweier Seiten im Vergleiche mit der dritten Seite 31

Sechster Abſchnitt.

Parallele Linien. — Parallelogram. — Aenderungen der Winkel bei ungeänderten Seiten. — Die einander gegenüber liegenden Seiten und Winkel gleich. — Parallel-Lineal. — Diagonalen. — Rechtecke. — Verſchiedene Eigenſchaften der Parallelograme 34

Seite

Siebenter Abschnitt.

Bestimmung des Flächen-Inhaltes eines Parallelograms. — Zerfällung gleicher Parallelograme..... 40

Achter Abschnitt.

Numerischer Ausdruck des Flächen-Inhaltes eines Parallelogrames. — Seine Zerfällung in Quadrate. — Parallelograme lassen sich stets auf Rechtecke bringen. — Numerischer Ausdruck für die Fläche eines Dreiecks. — Für die Fläche anderer Figuren 44

Neunter Abschnitt.

Merkwürdige Eigenschaften eines rechtwinkligen Dreieckes. — Die Quadrate der Katheten zusammen gleich dem Quadrate der Hypothenuse (Eselsbrücke). — Beweis durch Zerfällung. — Andere Beweise. — Zerfällung des Quadrates einer eingetheilten Linie. — Um wie viel das Quadrat der Linie die Quadrate ihrer Theile übersteigt..... 50

Zehnter Abschnitt.

Aehnliche Figuren. — Aehnliche Dreiecke. — Verhältnisse ihrer Seiten. — Wie man ähnliche Dreiecke ihrer Größe nach vergleicht. — Regelmäßige und unregelmäßige Figuren. — Figuren nach kleinerem und größerem Maaßstabe 59

Eilfter Abschnitt.

Anwendungen der Eigenschaften ähnlicher Figuren. — Die Höhe eines Kirchthurmes aus der Ferne zu messen. — Die Höhe eines Berges, ohne ihn zu

Seite

ersteigen. — Die Distanz des Mondes von der Erde zu bestimmen. — Eingetheilte Maaßstäbe. — Bestimmung kleiner Bruchtheile eines Zolles. — Eigenschaften von vier Proportionalen. — Methode, Proportionalen zu finden 67

Zwölfter Abschnitt.

Kreise. — Mittelpunkt. — Umfang. — Halbmesser. — Grade. — Quadranten. — Verschiedene Eintheilungen des Kreises. — Grade in Minuten und Sekunden getheilt. — Quadratur des Kreises. — Unmöglichkeit eines genauen numerischen Ausdruckes des Verhältnisses zwischen Durchmesser und Umfang. — Umfang der Erde. — Näherungsweise Bestimmung des Umfanges eines Kreises. — Wie findet man den Flächen-Inhalt eines Kreises, wenn sein Halbmesser gegeben ist? 78

Dreizehnter Abschnitt.

Eigenschaften von Kreis-Segmenten. — Peripheriewinkel im selben Segmente sind gleich. — Peripheriewinkel im Halbkreise sind Rechte. — Dem Kreise einbeschriebene Vierecke. — Winkel in verschiedenen Segmenten 91

Vierzehnter Abschnitt.

Parallele Sehnen. — Eine Tangente zu ziehen. — Einander schneidende Sehnen. — Einbeschriebene und umschriebene Figuren. — Einbeschriebene Polygone 98

Seite

Fünfzehnter Abſchnitt.

Flächen und Körper. — Ebenen. — Krumme Flächen. — Ein Würfel. — Kubikzoll. — Parallelopipede. — Ihre Zerfällung in Würfel. — Numeriſcher Ausdruck des körperlichen Inhaltes eines Parallelopipedes 107

Sechszehnter Abſchnitt.

Zerfällung von Parallelopipeden in Säulen und Schichten. — Senkrechte Körper im Allgemeinen. — Methode, ihren Körper-Inhalt zu beſtimmen. — Prismen. — Cylinder. — Vergleichung beider Körper in Bezug auf ihren Körper-Inhalt. — Schnitte durch dieſe Körper 115

Siebzehnter Abſchnitt.

Pyramiden und Kegel. — Vergleichung ihres körperlichen Inhaltes. — Pyramiden und Kegel, verglichen mit Prismen und Cylindern 123

Achtzehnter Abſchnitt.

Körperlicher Inhalt von Prismen im Allgemeinen. — Oberflächen von Prismen und Cylindern. — Regelmäßige Pyramiden. — Die Oberflächen und körperlichen Inhalte von Würfeln, und anderen unter einander ähnlichen Körpern nicht der Länge ihrer Kanten proportionirt 131

Neunzehnter Abſchnitt.

Kugel. — Erzeugt durch die Drehung eines Kreiſes. — Schnitt einer Kugel. — Einer Kugel umſchriebener Cylinder. — Verhältniß ihrer Größe. — Oberfläche der Kugel, verglichen mit der des Cylinders. — Mit dem Flächen-Inhalte eines größten

Seite

Kreises der Kugel. — Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Kugel. — Oberflächen und Körper-Inhalte verschiedener Kugeln, nicht ihren Durchmessern proportional 138

Zwanzigster Abschnitt.

Axen und Pole eines größten Kreises der Kugel. — Wie ein größter Kreis die Kugel, und wie zwei größte Kreise sich unter einander theilen. — Neigung der Ebenen zweier größter Kreise derselben Kugel. — Sie kann auf dreierlei Art gemessen werden. — Größte Kreise, die durch die Pole eines anderen größten Kreises gehen 150

Fig. 1.

Fig. 2.

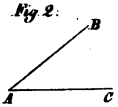


Fig. 3.

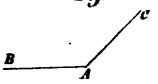


Fig. 4.

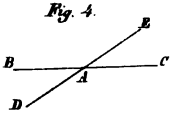


Fig. 5.

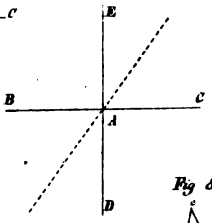


Fig. 6.

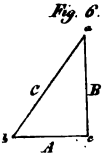


Fig. 7.

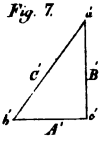


Fig. 8.

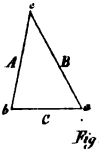


Fig. 9.

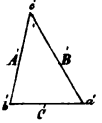


Fig. 10.

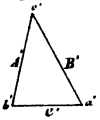


Fig. 11.

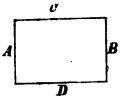


Fig. 12.

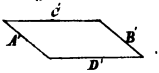


Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

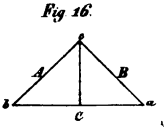


Fig. 17.

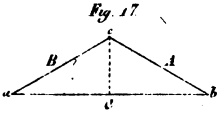


Fig. 18.

Fig. 19.

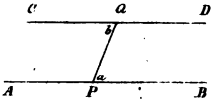


Fig. 20

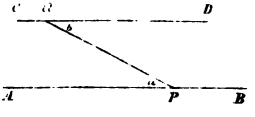


Fig. 21.

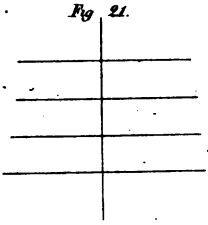


Fig. 22.

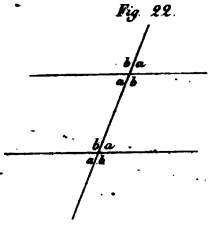


Fig. 23.

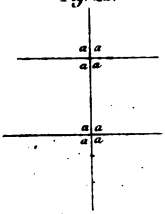


Fig. 24.

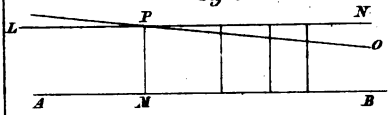


Fig. 25.

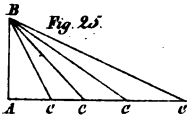


Fig. 26.

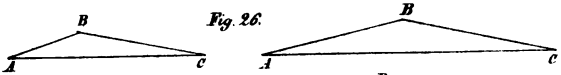


Fig. 27.

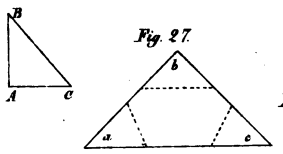


Fig. 28.

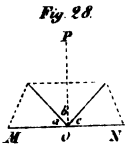


Fig. 29.

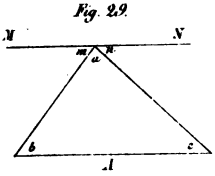


Fig. 30.

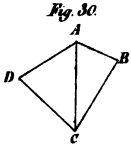


Fig. 31.

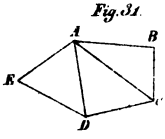


Fig. 32.

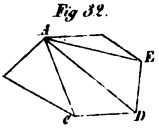


Fig. 33.

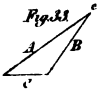


Fig. 34.

Fig. 35.

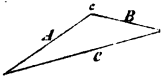


Fig. 36.

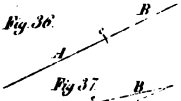


Fig. 37.

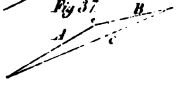


Fig. 38.

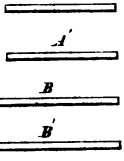
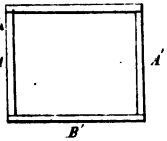


Fig. 39.



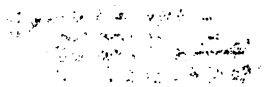


Fig. 40.

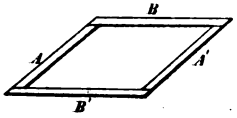


Fig. 41.

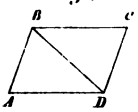


Fig. 43.

Fig. 42.

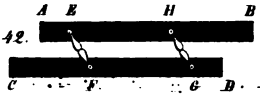


Fig. 44.

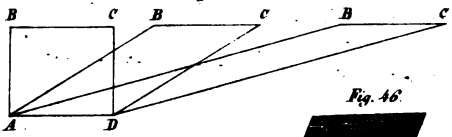


Fig. 47.

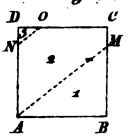


Fig. 46.

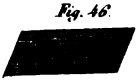


Fig. 45.

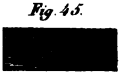


Fig. 49.

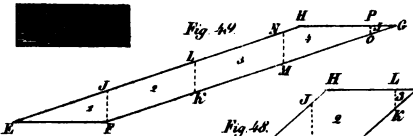


Fig. 50.

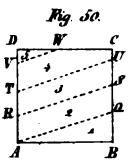


Fig. 48.

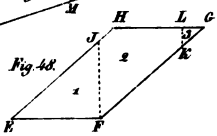


Fig. 51.

D			
K	5	10	15
J	4	9	14
H	3	8	13
G	2	7	12
	1	6	11
	A	E	F	B

Fig. 52.

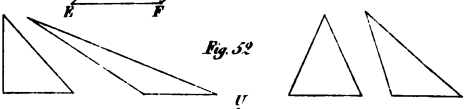


Fig. 54.

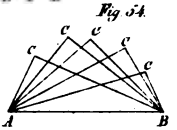


Fig. 55.

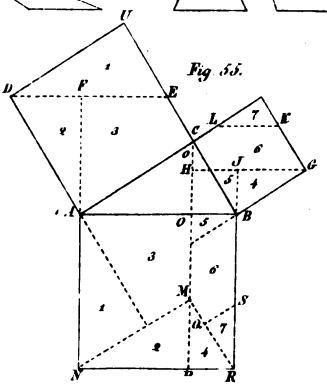


Fig. 53.

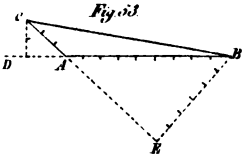


Fig. 56.

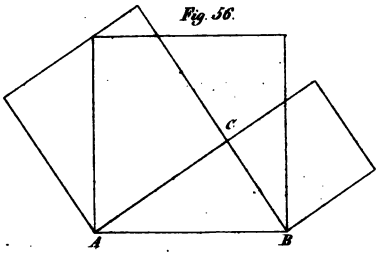


Fig. 58.

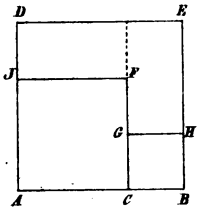


Fig. 59.

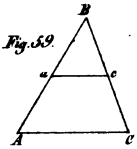


Fig. 57.

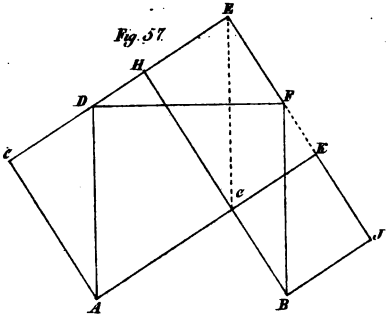


Fig. 60.

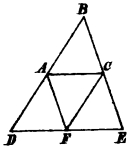


Fig. 62.

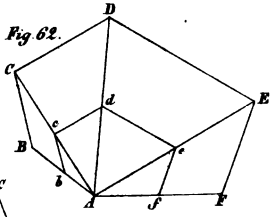


Fig. 63.

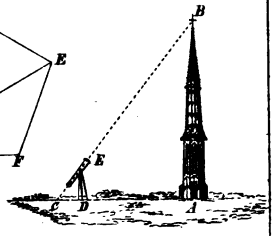


Fig. 61.

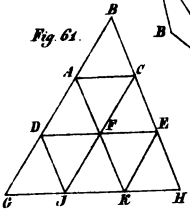


Fig. 64.

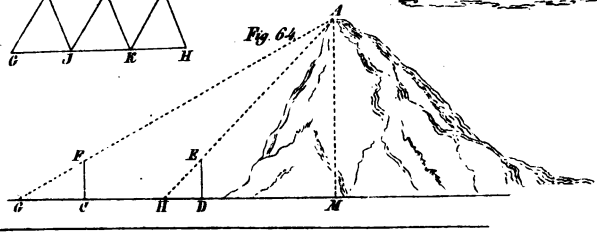


Fig. 65.

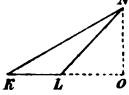


Fig. 66.

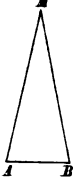


Fig. 62

Fig. 71.

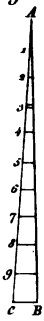


Fig. 67

Fig. 68.

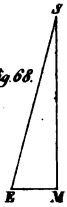


Fig. 70.

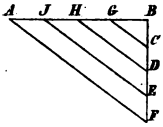


Fig. 72.

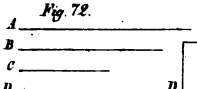


Fig. 73.

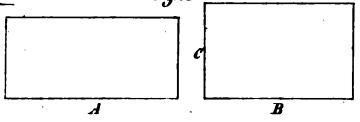


Fig. 74.

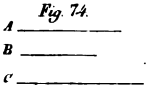


Fig. 75.

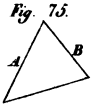


Fig. 76.

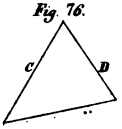


Fig. 77.

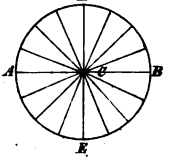


Fig. 78.

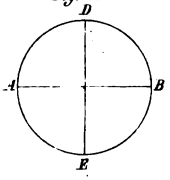


Fig. 79.

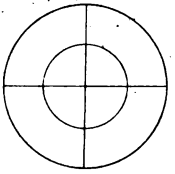


Fig. 80.

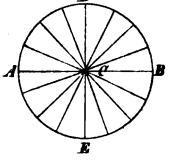


Fig. 81.

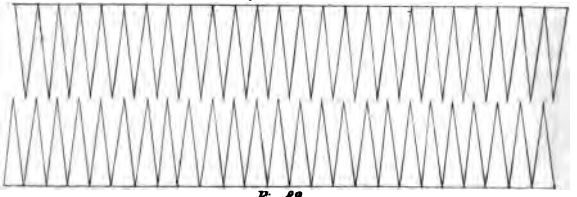


Fig. 82.

Fig. 83.

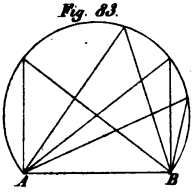


Fig. 85.

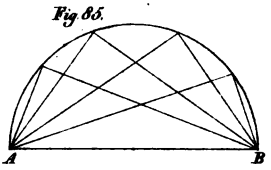


Fig. 84.

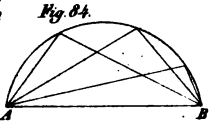


Fig. 86.

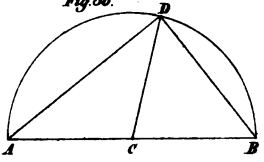


Fig. 87.

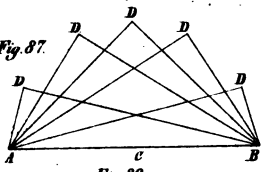


Fig. 88.

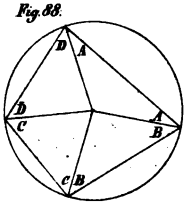


Fig. 89.

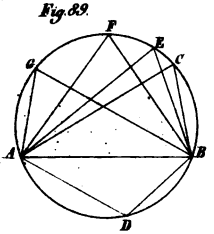


Fig. 91.

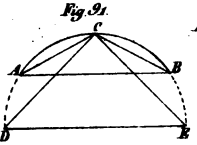


Fig. 90.

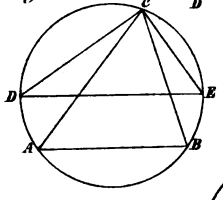


Fig. 92.

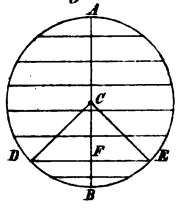


Fig. 93.

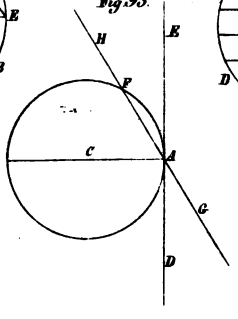


Fig. 94.

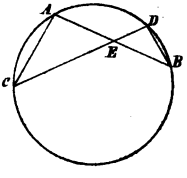


Fig. 95.

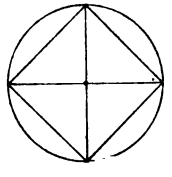


Fig. 113.

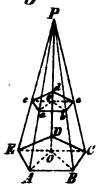


Fig. 114.

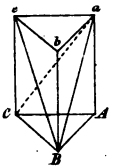


Fig. 115.

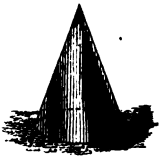


Fig. 116.

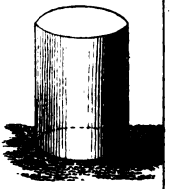


Fig. 117.

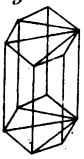


Fig. 118.

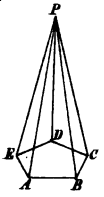


Fig. 120.

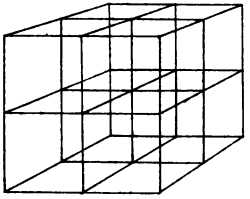


Fig. 119.

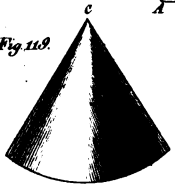


Fig. 123.

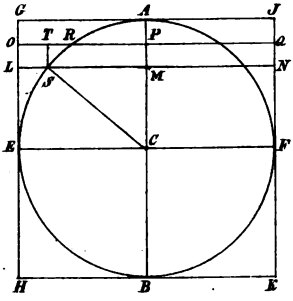


Fig. 121.

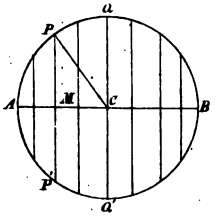


Fig. 122.

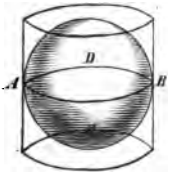


Fig. 124.

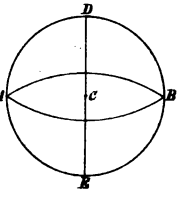


Fig. 125.

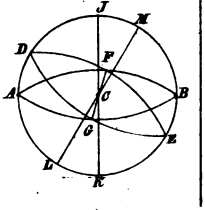


Fig. 65.

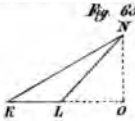


Fig. 66.

Fig. 67.

Fig. 68.

Fig. 69.

Fig. 70.

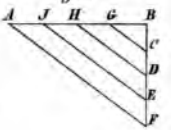
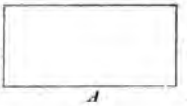


Fig. 71.

Fig. 72.

Fig. 73.



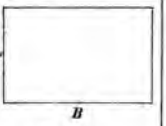


Fig. 74.

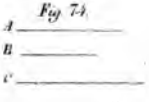


Fig. 75.

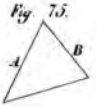


Fig. 76.

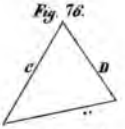


Fig. 77.

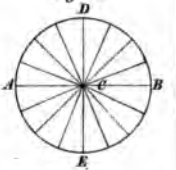


Fig. 78.

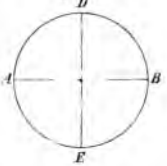


Fig. 79.

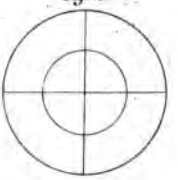


Fig. 80.

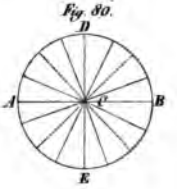


Fig. 81.

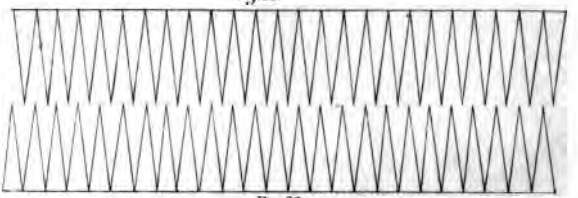


Fig. 82.

Fig. 83.

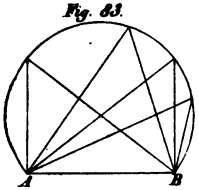


Fig. 85.

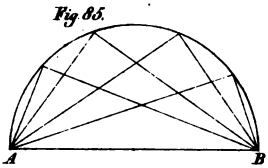


Fig. 84.

Fig. 86.

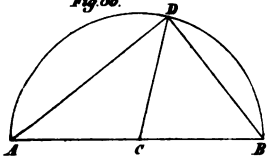


Fig. 87.

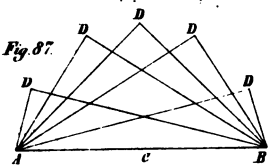


Fig. 88.

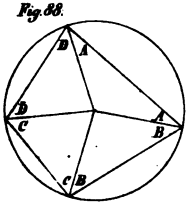


Fig. 89.

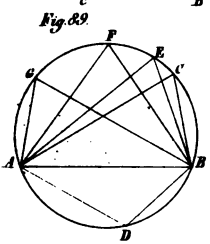


Fig. 91.

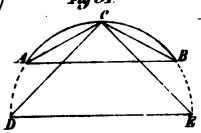


Fig. 90.

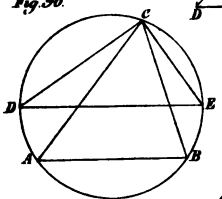


Fig. 92.

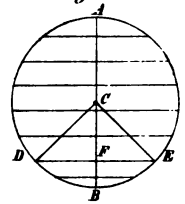


Fig. 93.

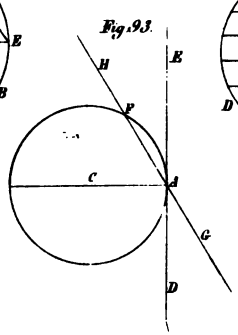


Fig. 94.

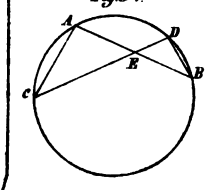


Fig. 95.

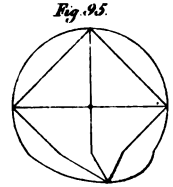


Fig. 96.

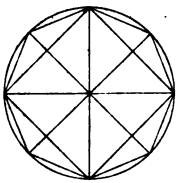


Fig. 97.

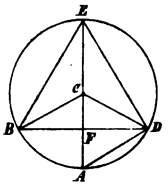


Fig. 98.

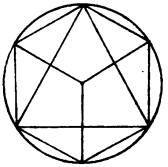


Fig. 101.

Fig. 99.

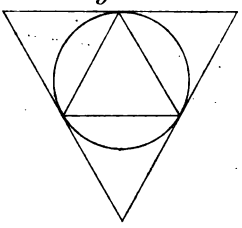


Fig. 100.

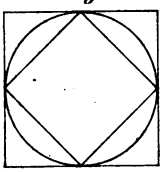


Fig. 102.

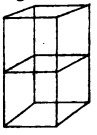


Fig. 103.

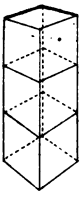


Fig. 104.

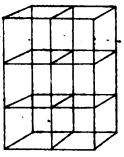


Fig. 105.

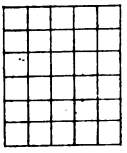


Fig. 106.

Fig. 107.

Fig. 108.

Fig. 109.

Fig. 112.

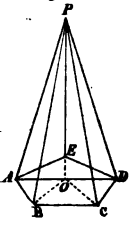


Fig. 110.

Fig. 111.

Fig. 113.

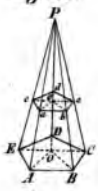


Fig. 114.

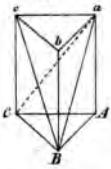


Fig. 115.

Fig. 116.

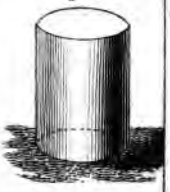


Fig. 117.

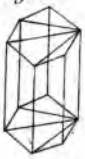


Fig. 118.

Fig. 120.

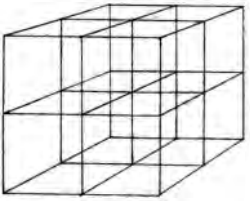


Fig. 119.

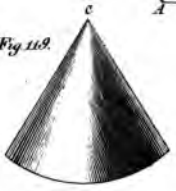


Fig. 123.

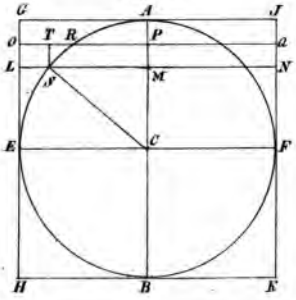


Fig. 121.

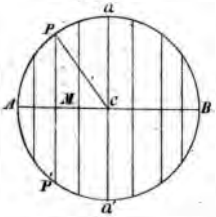


Fig. 122.

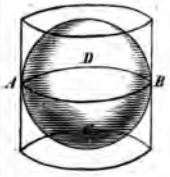


Fig. 124.

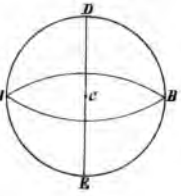
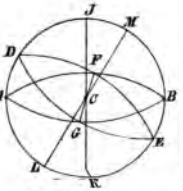
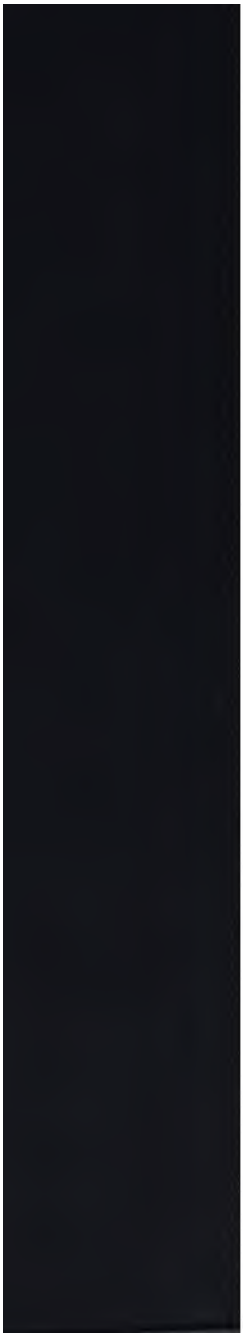



Fig. 125.